復刊

超函数論

吉田耕作 著

共立出版株式会社

はしがき

超函数の理論を創めた Laurent Schwartz は，この理論を確立した功績により，1950 年の国際数学者会議において Fields Prize を授けられた．かれはこの理論を，数学専攻者のみならず物理学者や工学者にも伝える目的で，Théorie des distributions, I et II (1950) を Paris の Hermann 社から出版している．これには岩村聯氏の邦訳（岩波）も出版されて，理論の意義および現状を知るための唯一の書物となっている．しかしこの書物は，線形位相空間に関する一般知識の説明や証明を省いたところがあるために，数学専攻者にも幾分近づきがたい感じを与えるようである．

本講座では，一般の線形位相空間を表面に出さずに，距離空間や Hilbert 空間の初歩の予備知識があれば十分読み得るように述べたつもりである．

1956年10月

吉田耕作

今回の再版に際して，誤植などの訂正に山中健氏の多大な御援助を頂いたことをしるして，山中氏に厚く感謝の意を表明したい．

1967年6月

吉田耕作

目　　　次

第1章 序　　論

超函数 (distribution) は“部分積分の概念を通しての函数概念の拡張”として L. Schwartz によって創められた (1945 年) ものである．超函数は“無限回微分可能な函数の系列のある意味の極限”と考えられるのであるが，部分積分およびそれから導かれる Gauss–Green–Stokes 等の積分公式を通して解析学の根本に触れているために，とくに偏微分方程式やフーリエ解析の統一的かつ一般的な取扱いに有効なことが示され，ひいては調和積分論等を通じてトポロジーの解析的研究にも偉力を発揮しつつあるのである．

本書は超函数論への入門として，できるだけ少ない予備知識のもとにその一般論を紹介したい．Lebesgue 式積分論は既知とするが，完備な距離空間に関する Baire–Hausdorff の定理や，Hilbert 空間に関する一般概念等の予備知識については附録に簡単に解説して読者の便宜をはかっておいた．

1.1 超函数の定義および例

函数空間 $(\mathfrak{D}_{R^n})$　n 次元ユークリッド空間 R^n の点を $x=(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ で表わし，$y=(y_1, y_2, \cdots, y_n)$ および実数 α に対して

$$x+y=(x_1+y_1, x_2+y_2, \cdots, x_n+y_n)$$

$$\alpha x=(\alpha x_1, \alpha x_2, \cdots, \alpha x_n)$$

等と書く．R^n で定義せられた複素数値の無限回偏微分可能な函数 $\varphi(x)=\varphi(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ に対して，R^n の部分集合

$$K=\{x\,;\,\varphi(x)\neq 0\}^{1)}$$

にその集積点をつけ加えたもの，すなわち K の**閉苞** (closure) を $\varphi(x)$ の**台**または**担い手** (carrier, support) といい，これを car. (φ) で表わす．その台がコンパクトな集合 (R^n で考えているから有界閉集合ということと同義) であるような $\varphi(x)$ の全体を $(\mathfrak{D}_{R^n})$ と書くことにすれば，$(\mathfrak{D}_{R^n})$ は算法

1)　$\{x;\cdots\}$ は条件…を満足する x の全体のつくる集合を示す．

$$(\varphi+\psi)(x)=\varphi(x)+\psi(x)$$

$$(\alpha\varphi)(x)=\alpha\varphi(x)\qquad(\alpha \text{ は複素数})$$

で複素数を係数とする**ベクトル空間** (linear space) をつくる．$\cup$をもって**和集合**を表わすとき

$$\text{car.}(\varphi+\psi)\subseteqq\text{car.}(\varphi)\cup\text{car.}(\psi)$$

$$\text{car.}(\alpha\varphi)\subseteqq\text{car.}(\varphi)$$

であるからである．

恒等的に0となる函数（これを0で表わす）以外に $(\mathfrak{D}_{R^n})$ に属する函数は確かに存在する．例えば $\varepsilon>0$ とし，$|x|=(\sum_{i=1}^{n}x_i^2)^{1/2}$ とおくとき，

$$\varphi_\varepsilon(x)=\begin{cases}0, & |x|\geqq\varepsilon \text{ のとき}\\ \exp(1/(|x|^2-\varepsilon^2)), & |x|<\varepsilon \text{ のとき}\end{cases}\qquad(1\cdot1)$$

がその例である．car. (φ_ε) は原点を中心とし半径 ε の閉じた球 $|x|\leqq\varepsilon$ であり，$\varphi_\varepsilon(x)$ が $|x|=\varepsilon$ においても無限回偏微分可能なことは容易にわかる．$|x|\to\varepsilon$ なるとき $\exp(1/(|x|^2-\varepsilon^2))$ は $(|x|-\varepsilon)$ のいかなるべきよりも高い order で0に収束するからである．

函数空間 $(\mathfrak{D}_K)$　K を R^n のコンパクトな集合とし，car.$(\varphi)\subseteqq K$ であるような $\varphi(x)\in(\mathfrak{D}_{R^n})$ の全体を $(\mathfrak{D}_K)$ と書くことにすれば，(1·1) から明らかに $(\mathfrak{D}_K)$ は複素数を係数とするベクトル空間をつくる．すなわち K の外では恒等的に0となるような無限回偏微分可能な函数 $\varphi(x)$ の全体 $(\mathfrak{D}_K)$ は $(\mathfrak{D}_{R^n})$ の部分ベクトル空間をつくる．$(\mathfrak{D}_K)$ の函数列 $\{\varphi_h(x)\}$ の恒等的に0なる函数への収束を

$$\left.\begin{array}{l}h\to\infty \text{ なるとき，} \varphi_h(x) \text{ およびその偏導函数 } \partial\varphi_h/\partial x_j,\\ \partial^2\varphi_h/\partial x_j\partial x_k,\cdots \text{ の各々が0に一様収束する}\end{array}\right\}\qquad(1\cdot2)$$

によって定義し

$$\varphi_h\Longrightarrow0((\mathfrak{D}_K)) \text{ または } \lim_{h\to\infty}\varphi_h=0\ ((\mathfrak{D}_K))$$

で表わす．

$(\mathfrak{D}_{R^n})$ **における収束** $\varphi_h\Longrightarrow0$　$(\mathfrak{D}_{R^n})$ の函数列 $\{\varphi_h(x)\}$ の恒等的に0なる函数0への収束を

$$\left.\begin{array}{l}\text{あるコンパクトな集合 } K\subseteq R^n \text{ に対して,}\\ \varphi_h\in(\mathfrak{D}_K)\ (h=1,2,\cdots)\ \text{かつ}\ \varphi_h\Longrightarrow 0\ ((\mathfrak{D}_K))\end{array}\right\}\qquad(1\cdot 3)$$

の成り立つことによって定義して

$$\varphi_h\Longrightarrow 0\ ((\mathfrak{D}_{R^n}))\ \text{または}\ \lim_{h\to\infty}\varphi_h=0\ ((\mathfrak{D}_{R^n}))$$

あるいは $(\mathfrak{D}_{R^n})$ を略して　　$\varphi_h\Longrightarrow 0$

と書く. すなわち $\varphi_h\Longrightarrow 0$ は

$$\left.\begin{array}{l}\text{あるコンパクトな集合 } K\subseteq R^n \text{ に対して car.}(\varphi_h)\subseteq K\\ (h=1,2,\cdots),\ \text{かつ}\ \varphi_h(x)\ \text{および その偏導函数}\ \partial\varphi_h/\partial x_j,\\ \partial^2\varphi_h/\partial x_j\partial x_k,\cdots\ \text{の各々が 0 に一様収束する}\end{array}\right\}\qquad(1\cdot 4)$$

ことである.

超函数の定義　$(\mathfrak{D}_{R^n})$ の各 $\varphi(x)$ に対して複素数を対応させる $T(\varphi)$ が次の二条件

$$\left.\begin{array}{ll}T(\alpha_1\varphi_1+\alpha_2\varphi_2)=\alpha_1T(\varphi_1)+\alpha_2T(\varphi_2) & \text{(加法性)}\\ \lim\limits_{\varphi_h\Longrightarrow 0}T(\varphi_h)=0 & \text{(連続性)}\end{array}\right\}\qquad(1\cdot 5)$$

を満足するときに, この対応 T を（$(\mathfrak{D}_{R^n})$ で定義せられた）**超函数**とよぶ. 函数解析の言葉でいえば, $(\mathfrak{D}_{R^n})$ で定義せられた“連続な加法的汎函数” T を超函数とよぶのであって, この**汎函数** (functional) T の**試料函数** (testing function) $\varphi(x)$ においてとる値が $T(\varphi)$ であるわけである.

超函数の例　**例 1**　$f(x)$ を R^n で定義せられた複素数値の可測函数で**局所可積分** (locally integrable) とする. すなわち $f(x)$ は任意のコンパクト集合 $\subseteq R^n$ の上で Lebesgue 式積分可能とする. そうすれば, 任意の $\varphi(x)\in(\mathfrak{D}_{R^n})$ に対して car.(φ) はコンパクトであるから

$$T_f(\varphi)=\int_{R^n}f(x)\varphi(x)dx=\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\varphi(x)dx_1\cdots dx_n\qquad(1\cdot 6)$$

が定義される. この T_f が超函数の条件を満足することは容易にわかる.

例 2　$\mu(E)$ を R^n の Borel 集合に対して σ–加法的[1]（で有界閉集合 E に対しては

1)　$\{E_h\}$ を互に共通点のない Borel 集合列とするとき

$$\mu\left(\bigcup_{h=1}^{\infty}E_h\right)=\sum_{h=1}^{\infty}\mu(E_h)$$

有限値をとる）複素数値の**測度**（measure）とするときの Lebesgue–Stieltjes 積分

$$T_\mu(\varphi)=\int_{R^n}\varphi(x)\mu(dx) \tag{1·7}$$

が超函数の条件（1·5）を満足することも見易い．

例 3 偏微分作用素

$$D^{(p)}=\partial^{p_1+p_2+\cdots+p_n}/\partial x_1{}^{p_1}\partial x_2{}^{p_2}\cdots\partial x_n{}^{p_n} \tag{1·8}$$

を導入する．各 $\varphi\epsilon(\mathfrak{D}_{R^n})$ に対して

$$(D^{(p)}\varphi)(0)=(\partial^{p_1+\cdots+p_n}\varphi/\partial x_1{}^{p_1}\cdots\partial x_n{}^{p_n})(0,\cdots,0) \tag{1·9}$$

を対応させると，$T(\varphi)=(D^{(p)}\varphi)(0)$ によって超函数 T が定義されることは明らかである．

例 4 $p_1=p_2=\cdots=p_n=0$ なる特別の場合，すなわち各 $\varphi\,\epsilon\,(\mathfrak{D}_{R^n})$ に $\varphi(0)$ を対応させる超函数を T_δ と書いて：

$$T_\delta(\varphi)=\varphi(0) \tag{1·10}$$

T_δ を **Dirac 超函数**という．

Dirac の δ 函数 物理学者 Dirac は量子力学に登場してくる対称作用素のスペクトル分解を形式的直観的に表わすために，いわゆる δ 函数を導入した．これは一次元の場合には，

$$\left.\begin{array}{l} x\neq 0 \text{ ならば } \delta(x)=0,\ \delta(0)=\infty \text{ にして } \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\delta(x)dx=1 \\ \text{かつ“任意の函数”} \varphi(x) \text{ に対して } \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\delta(x)\varphi(x)dx=\varphi(0) \end{array}\right\} \tag{1·11}$$

が成り立つものとして定義される．このような函数は“数学的に許されない”ので物理学者もこれを**擬函数**（pseudo-function）とよんでいる．Dirac はさらに部分積分で（1·11）よりも一般な公式

$$\int_{-\infty}^{\infty}\delta^{(p)}(x)\varphi(x)dx=(-1)^p\varphi^{(p)}(0) \tag{1·12}$$

も成り立つとした．次の§に示すように，超函数的に考えればこの奇妙な公式もすなおな解釈をもつのである．

1.2 超函数の偏微分

超函数の偏微分 1·1 の例1において $f(x)$ を一回連続偏微分可能とする

と，部分積分で

$$T_{\partial f/\partial x_i}(\varphi)=T_f(-\partial\varphi/\partial x_i) \tag{1·13}$$

を得る．$\varphi(x)$ の台がコンパクトであることを使えば

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\partial f}{\partial x_i}\varphi(x)dx_i=[f(x)\varphi(x)]_{x_i=-\infty}^{x_i=+\infty}-\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}dx_i$$
$$=-\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}dx_i$$

となるからである．(1·13) に示唆されて，任意の超函数 T の偏微分超函数 $\partial T/\partial x_i$ を次のようにして定義する．すなわち $T(-\partial\varphi/\partial x_i)$ を $\varphi\in(\mathfrak{D}_{R^n})$ の汎函数と考えると (1·5) を満足するから，これをある超函数 S の試料函数 φ における値と考えてよい．この超函数 S をもって $\partial T/\partial x_i$ と定義するのである．

$$\frac{\partial T}{\partial x_i}(\varphi)=T\left(-\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\right)=(-1)\,T\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\right) \tag{1·14}$$

よって任意の超函数は無限回偏微分可能で偏微分した結果はまた超函数になる．そして (1·14) を繰返して

$$\left.\begin{aligned}&D^{(p)}=\partial^{p_1+p_2+\cdots+p_n}/\partial x_1^{p_1}\partial x_2^{p_2}\cdots\partial x_n^{p_n}\ \text{に対して}\\&(D^{(p)}T)(\varphi)=(-1)^{|p|}T(D^{(p)}\varphi)\\&\quad\text{ただし}\ |p|=p_1+p_2+\cdots+p_n\end{aligned}\right\} \tag{1·15}$$

を得る．

したがって，$n=1$ なるとき

$$\left(\frac{d^p}{dx^p}T_\delta\right)(\varphi)=(-1)^pT_\delta\left(\frac{d^p\varphi}{dx^p}\right)=(-1)^p\varphi^{(p)}(0)$$

が成り立ち，(1·12) が超函数論的には (1·15) の特別な場合に他ならないことがわかる．

Poisson の公式　これは

$$\varDelta=\sum_{i=1}^{n}\partial^2/\partial x^2_i \quad (\text{ラプラシアン})$$

$$r=r(y,x)=\left(\sum_{i=1}^{n}(y_i-x_i)^2\right)^{1/2}$$

とするときの公式

$$\left.\begin{array}{l}\displaystyle\int_{R^n} r(y,x)^{2-n}\Delta\Phi(x)\,dx=(2-n)\Omega_{n-1}(y),\Phi \quad n\geqq 3\\ \text{(ただし }\Omega_{n-1}\text{ は原点を中心とし半径 1 の球の表面積}\\ 2(\sqrt{\pi})^n/\Gamma(n/2)\text{ を表わす).}\\ \displaystyle\int_{R^2}\log r(y,x)\Delta\Phi(x)\,dx=2\pi\Phi(y), \qquad n=2\end{array}\right\} \tag{1·16}$$

であって，ポテンシャル論の基本定理である．この公式は超函数論的には，

$$\left.\begin{array}{ll}\Delta T_{r(y,x)^{2-n}}=(2-n)\Omega_{n-1}\cdot T_{\delta_y}, & n\geqq 3\\ \Delta T_{\log r(y,x)}=2\pi T_{\delta_y}, & n=2\end{array}\right\} \tag{1·17}$$

のごとく覚え易い形に書かれる．ただし

$$T_{\delta_y}(\varphi)=\varphi(y) \tag{1·18}$$

である．

((1·17) の証明) G を R^n の有界領域でその境界 ∂G はいくつかの滑かな超曲面から成るものとする．このとき $u(x),v(x)$ が閉領域 $G\cup\partial G$ において一回連続偏微分可能とすると，**Green の積分公式**

$$\int_G u\cdot\Delta v\,dx-\int_G v\cdot\Delta u\,dx=\int_{\partial G}\left(u\frac{\partial v}{\partial\nu}-v\frac{\partial u}{\partial\nu}\right)dS \tag{1·19}$$

が成り立つ．ここに ν は外向き法線，dS は ∂G 上の超曲面要素である．

このよく知られた公式を利用して (1·17) を出す．すなわち次のとおり．

点 y を中心とし半径 $\varepsilon>0$ の球の外側に (1·19) を応用して

$$\begin{aligned}\int_{r(y,x)\geqq\varepsilon} r^{2-n}(y,x)\Delta\varphi(x)\,dx&=\int_{r(y,x)\geqq\varepsilon}\varphi(x)\Delta r^{2-n}(y,x)\,dx\\ &+\int_{r(y,x)=\varepsilon}\varepsilon^{2-n}\frac{\partial\varphi(x)}{\partial\nu}\varepsilon^{n-1}d\Omega_{n-1}\\ &-\int_{r(y,x)=\varepsilon}\varphi(x)\frac{\partial}{\partial\nu}r(y,x)^{2-n}\cdot\varepsilon^{n-1}d\Omega_{n-1}\end{aligned}$$

を得る．$\varphi(x)$ の台がコンパクトであるから $\displaystyle\int_{r(y,x)\geqq\varepsilon}(\quad)\,dx$ と書いても実は有界領域での積分であり，また点 y を中心とする極座標においては

$$dx=dx_1\cdots dx_n=r^{n-1}\cdot dr\cdot d\Omega_{n-1} \tag{1·20}$$

したがって，境界 $r(y,x)=\varepsilon$ の上では $dS=\varepsilon^{n-1}\cdot d\Omega_{n-1}$ となるからである．

よく知られているように

$$x \neq y \text{ ならば } \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2}{\partial x_i^2}r^{2-n}(y,x)=0$$

が成り立つから[1] 右辺第一項$=0$．また左辺は (1·20) によって

$$\int_{r(y,x)\geqq\varepsilon} r^1\cdot\Delta\varphi(x)\,dr\,d\Omega_{n-1}$$

となるから $\varepsilon\downarrow 0$ なるとき収束してその極限は

$$\int_{R^n} r^{2-n}(y,x)\Delta\varphi(x)\,dx=T_{r^{2-n}(y,x)}(\varphi)$$

に等しい．同じく右辺第二項は $\varepsilon\downarrow 0$ なるとき 0 に収束する．また境界 $r(y,x)$ $=\varepsilon$ の上で

$$\frac{\partial}{\partial\nu}r^{2-n}(y,x)=-\frac{\partial}{\partial r}r^{2-n}(y,x)=(n-2)\varepsilon^{1-n}$$

となるから，右辺第三項は $\varepsilon\downarrow 0$ なるとき

$$(2-n)\varphi(0)\Omega_{n-1}$$

に等しい．

かくして $n\geqq 3$ なるときの (1·17) が証明された．$n=2$ なるときも同様にして証明される．

1·3 超函数の算法

超函数 T,S の和は

$$(T+S)(\varphi)=T(\varphi)+S(\varphi) \tag{1·21}$$

によって定義され，また超函数の定数倍は

$$(\alpha T)(\varphi)=\alpha T(\varphi) \tag{1·22}$$

によって定義される．明らかに

$$T_f+T_g=T_{f+g} \tag{1·21'}$$

---

1) $\dfrac{\partial}{\partial x_i}r^\alpha(y,x)=\alpha r^{\alpha-1}\cdot r^{-1}\cdot(x_i-y_i)$,

$\dfrac{\partial^2}{\partial x_i^2}r^\alpha=\alpha(\alpha-1)r^{\alpha-2}\cdot r^{-2}\cdot(x_i-y_i)^2+\alpha r^{\alpha-1}\cdot(r^{-1}-r^{-3}\cdot(x_i-y_i)^2)$,

故に $\Delta r^\alpha=\alpha(\alpha-1)r^{\alpha-2}+\alpha(n-1)r^{\alpha-2}=\alpha(\alpha+n-2)r^{\alpha-2}$.

$$\alpha T_f = T_{\alpha f} \tag{1·22}'$$

であるから，上の (1·21)，(1·22) は函数の和，函数の定数倍の概念の拡張になっている．

超函数の積は一般に定義できない．しかし $f(x)$ を無限回偏微分可能な函数とすれば，超函数 T_f と任意の超函数 T との積 T_fT は

$$(T_fT)(\varphi) = T(f\varphi) \tag{1·23}$$

によって定義される．car. $(f\varphi) \subseteqq$ car. (φ) であり，かつ f, φ とともに，$f(x)\varphi(x)$ も無限回偏微分可能であるから $f\varphi \in (\mathfrak{D}_{R^n})$．よって $T(f\varphi)$ が定義されるが $T(f\varphi)$ を φ の汎函数 $S(\varphi)$ と考えれば S が超函数の条件 (1·5) を満足することは見易い．この超函数 S を T_fT, TT_f 等と書いて

$$T_fT = TT_f \tag{1·24}$$

これを T_f と T との**積** (product) とよぶ．

超函数の直積および畳み込み その点を一般に x で表わす R^n の他に，その点を一般に $y=(y_1, y_2, \cdots, y_m)$ で表わす R^m も考える．$(\mathfrak{D}_{R^n})$ に属する函数 $\varphi(x)$ と $(\mathfrak{D}_{R^m})$ に属する函数 $\psi(y)$ との積 $\varphi_i(x)\cdot\psi_i(y)$ の一次結合

$$\sum_{i=1}^{k} c_i\varphi_i(x)\psi_i(y)$$

の全体を $(\mathfrak{D}_{R^n})$ と $(\mathfrak{D}_{R^m})$ との**直積** (direct product) と名づけて $(\mathfrak{D}_{R^n}) \times (\mathfrak{D}_{R^m})$ と書く．この直積の概念を拡張して“$(\mathfrak{D}_{R^n})$ で定義せられた超函数と $(\mathfrak{D}_{R^m})$ で定義せられた超函数との直積”を定義することができる(第4章)．またこの直積の概念を利用して二つの函数 $\in (\mathfrak{D}_{R^n})$ の**畳み込み** (convolution) または合成積

$$\varphi * \psi(x) = \int_{R^n} \varphi(x-z)\psi(z)dz \in (\mathfrak{D}_{R^n})$$

の概念を超函数の場合に拡張することができる(第5章)．これは超函数の構造を研究する上に，また超函数の Fourier 解析の研究に重要な役割をつとめる．

以上の算法の他に超函数の偏微分算法も (1·15) によって定義せられ，普通の偏微分算法の拡張になっているのみならず，任意の超函数は無限回偏微分可

能なことが示された．以上の諸算法を組合せることによって超函数の解析学が普通の解析学の拡張として建設せられるのであるが，とくに超函数の偏微分法の導入が解析学の根本である部分積分を通してなされているために，偏微分方程式論等の統一的取扱いに非常な効果を発揮するのである．

第 2 章　超函数の局所的構造

2・1　$(\mathfrak{D}_K)$ の距離づけ

定理 2・1　$(\mathfrak{D}_K)$ の函数の対 $\{\varphi,\psi\}$ にその距離（$\mathrm{dis}_K(\varphi,\psi)$ と書く）を定義して次の諸条件が満足されるようにできる.

$$\mathrm{dis}_K(\varphi,\psi)=\mathrm{dis}_K(\varphi-\psi,0)=\mathrm{dis}_K(\psi-\varphi,0)=\mathrm{dis}_K(\psi,\varphi) \tag{2·1}$$

$$\mathrm{dis}_K(\varphi,\psi)\geqq 0 \text{ かつ } \varphi=\psi \text{ と } \mathrm{dis}_K(\varphi,\psi)=0 \text{ とは同等} \tag{2·2}$$

$$\mathrm{dis}_K(\varphi,\psi)\leqq \mathrm{dis}_K(\varphi,\chi)+\mathrm{dis}_K(\chi,\psi) \quad (\text{三角不等式}) \tag{2·3}$$

$$\varphi_h \Longrightarrow 0 \ ((\mathfrak{D}_K)) \text{ と } \lim_{h\to\infty}\mathrm{dis}_K(\varphi,0)=0 \text{ とは同等} \tag{2·4}$$

（証明）　各 $\varphi\in(\mathfrak{D}_K)$ に対して

$$\rho_K{}^{(m)}(\varphi)=\sup_{|p|\leqq m,\, x\in K}|D^{(p)}\varphi(x)|$$

とおく. すなわち $\rho_K{}^{(m)}$ は $\varphi(x)$ の m 階以下のすべての偏導函数の絶対値の K における最大値である. 故に

$$m<p \text{ ならば } \rho_K{}^{(m)}(\varphi)\leqq \rho_K{}^{(p)}(\varphi) \tag{2·5}$$

であり, またすべての $m\geqq 0$ に対して

$$\rho_K{}^{(m)}(\varphi-\psi)=\rho_K{}^{(m)}(\psi-\varphi) \tag{2·1$'$}$$

$$\rho_K{}^{(m)}(\varphi-\psi)\geqq 0 \text{ かつ } \varphi=\psi \text{ と } \rho_K{}^{(m)}(\varphi-\psi)=0 \text{ とは同等} \tag{2·2$'$}$$

$$\rho_K{}^{(m)}(\varphi-\psi)\leqq \rho_K{}^{(m)}(\varphi-\chi)+\rho_K{}^{(m)}(\chi-\psi) \tag{2·3$'$}$$

が成り立つことは明らかである.

ここにおいて

$$\mathrm{dis}_K(\varphi,\psi)=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{2^m}\frac{\rho_K{}^{(m)}(\varphi-\psi)}{1+\rho_K{}^{(m)}(\varphi-\psi)} \tag{2·6}$$

を考える. $\sum_{m=0}^{\infty}2^{-m}$ が収束するから, (2·6) の収束することは明らかである. また (2·1)$'$, (2·2)$'$ および (2·6) によって (2·1), (2·2) は明らかである. また, 実数 $\alpha,\beta\geqq 0$ に対して

$$\frac{\alpha+\beta}{1+\alpha+\beta}=\frac{\alpha}{1+\alpha+\beta}+\frac{\beta}{1+\alpha+\beta}\leqq\frac{\alpha}{1+\alpha}+\frac{\beta}{1+\beta},$$

$$\frac{\alpha}{1+\alpha}\leqq\frac{\alpha+\beta}{1+\alpha+\beta}$$

が成り立つから (2·3)′ によって

$$\frac{\rho_K{}^{(m)}(\varphi-\psi)}{1+\rho_K{}^{(m)}(\varphi-\psi)}\leqq\frac{\rho_K{}^{(m)}(\varphi-\chi)}{1+\rho_K{}^{(m)}(\varphi-\chi)}+\frac{\rho_K{}^{(m)}(\chi-\psi)}{1+\rho_K{}^{(m)}(\chi-\psi)}$$

を得る．よって三角不等式 (2·3) は明らかである．

また $\lim_{h\to\infty}\mathrm{dis}_K(\varphi_h,0)=0$ は，どの m に対しても $\lim_{h\to\infty}\rho_K{}^{(m)}(\varphi_h)=0$ の成り立つことと同等であるから (2·4) は明らかである．(終)

定理 2·2 上のごとく距離づけられた距離空間 $(\mathfrak{D}_K)$ は完備 (complete) である．すなわち $(\mathfrak{D}_K)$ の函数列 $\{\varphi_h\}$ が Cauchy の収束条件

$$\lim_{h,p\to\infty}\mathrm{dis}_K(\varphi_h,\varphi_p)=0 \tag{2·7}$$

を満足するならば，$\{\varphi_h\}$ に対して

$$\lim_{h\to\infty}\mathrm{dis}_K(\varphi_h,\varphi)=0 \tag{2·8}$$

を満足するような $\varphi\in(\mathfrak{D}_K)$ がただ一つ存在する．

（証明） (2·7) から各 $m\geqq 0$ に対して $\lim_{h,p\to\infty}\rho_K{}^{(m)}(\varphi_h-\varphi_p)=0$ が成り立つ．とくに $\lim_{h,p\to\infty}\rho_K{}^{(0)}(\varphi_h-\varphi_p)=0$ から $\{\varphi_h(x)\}$ は K で一様収束する．よって K で定義せられた連続函数 $\hat{\varphi}(x)$ が存在して $\lim_{h\to\infty}\rho_K{}^{(0)}(\hat{\varphi}-\varphi_h)=0$. ところが $\lim_{h,p\to\infty}\rho_K{}^{(1)}(\varphi_h-\varphi_p)=0$ すなわち $\varphi_h(x)$ の一回偏導函数は K で一様収束する．よってその一様収束極限は $\hat{\varphi}(x)$ の対応する一回偏導函数に K で一様収束する．同様にしてすべての $m\geqq 0$ に対して $D^{(m)}\varphi_h(x)$ は，$h\to\infty$ なるとき K において一様に $D^{(m)}\hat{\varphi}(x)$ に収束する．

よって各 φ_h に対して $\mathrm{car.}(\varphi_h)\subseteqq K$ なることを使えば

$$\varphi(x)=\begin{cases}\hat{\varphi}(x), & x\in K \text{ なるとき}\\ 0, & x\notin K \text{ なるとき}\end{cases}$$

によって定義せられた $\varphi(x)$ が (2·8) を満足することは見易い．(終)

2.2 超函数の局所的構造

まず

定理 2·3 $(\mathfrak{D}_{R^n})$ の各 φ に対して定義せられて複素数値をとる汎函数 $T(\varphi)$ が加法的：

$$T(\alpha_1\varphi_1+\alpha_2\varphi_2)=\alpha_1 T(\varphi_1)+\alpha_2 T(\varphi_2) \tag{2·9}$$

であるとする．この T が超函数であるための必要かつ十分な条件は，すべてのコンパクト集合 $K\subseteqq R^n$ に対して**連続性**：

$$\lim_{h\to\infty} d_K(\varphi_h, 0)=0 \text{ ならば } \lim_{h\to\infty} T(\varphi_h)=0 \tag{2·10}$$

を満足することである．

（証明） T の $(\mathfrak{D}_{R^n})$ における連続性の定義 (1·5) および (1·3) ならびに (2·4) から明らかである．（終）

上の定理を利用して超函数の局所的構造を調べるために次の定義をする．

超函数の局所的階数の定義 超函数 T に対して，もし (2·10) よりも強い条件[1)]

$$\lim_{h\to\infty} \rho_K^{(m)}(\varphi_h)=0 \text{ ならば } \lim_{h\to\infty} T(\varphi_h)=0 \tag{2·11}$$

が満足されているときには T は K において**階数** (order) が高々 m であるといい，このような m の最小値を T の K における**階数**という．また，もし $(\mathfrak{D}_{R^n})$ で定義せられた加法的汎函数 T に対して $m\geqq 0$ が存在して

$$\left.\begin{array}{l}\text{すべてのコンパクト集合 } K\subseteqq R^n \text{ に対して}\\ \displaystyle\lim_{h\to\infty} \rho_K^{(m)}(\varphi_h)=0 \text{ ならば } \lim_{h\to\infty} T(\varphi_h)=0\end{array}\right\} \tag{2·12}$$

が成り立つならば，もちろん T は $(\mathfrak{D}_{R^n})$ において連続性を満足するから超函数である．このとき T の（R^n における）階数は高々 m であるといい，このような m の最小値を T の（R^n における）階数という．

例 1·1 における例 1，例 2 はいずれも階数 0 の超函数の例になっている．例 3 は原

---

1) 上に示したごとく $\lim_{h\to\infty} d_K(\varphi_h, 0)=0$ ならばすべての $m\geqq 0$ に対して $\lim_{h\to\infty} \rho_K^{(m)}(\varphi_h)=0$ である．

点 0 のみから成るコンパクト集合において階数 $|p|=p_1+p_2+\cdots+p_n$ の超函数の例になっている．この例 3 は（R^n における）階数 $|p|$ の超函数の例にもなっている．

注意 R^n の点列 $\{x^{(h)}\}$ を

$$|x^{(h)}|=\left(\sum_{i=1}^{n} x_i{}^{(h)2}\right)^{1/2}=h$$

$$\text{ただし}\quad x^{(h)}=(x_1{}^{(h)}, x_2{}^{(h)}, \cdots, x_n{}^{(h)})$$

なるごとくとり

$$T(\varphi)=\sum_{|k|=1}^{\infty}(D^{(k)}\varphi)(x^{(|k|)})$$

$$\text{ただし}\quad D^{(k)}=\partial^{k_1+\cdots+k_n}/\partial x_1{}^{k_1}\cdots\partial x_n{}^{k_n},\qquad |k|=k_1+\cdots+k_n$$

によって定義せられた超函数 T は，コンパクト集合 $\{x; |x|\leqq|x^{(h)}|\}$ の上ではその階数が h であるが，T は R^n において有限な階数をもたない．証明は容易である．（読者自ら試みられよ）．

上の例でコンパクト集合の上で階数有限となったのは偶然ではないのであって，われわれは一般に次の基本的定理を証明する[1] ことができるのである．

定理 2・4 任意の超函数 T は，任意のコンパクト集合 $K\subseteqq R^n$ の上で階数有限である．

（証明） 三段に分ける．

第一段： T は距離空間 $(\mathfrak{D}_K)$ の上で連続である（定理 2・3）から，$T(0)=0$ によって

$$\left.\begin{array}{l}\delta=\delta(T,K)>0 \text{ が存在して，} \varphi\epsilon(\mathfrak{D}_K) \text{ かつ } \mathrm{dis}_K(\varphi,0)\\ \leqq\delta \text{ ならば } |T(\varphi)|\leqq 1\end{array}\right\}\quad(2\cdot13)$$

が成り立たねばならない．$\delta(T,K)$ と書いたのは δ が T と K とに依存して決まることを明示するためである．ところが，任意の $m_0\geqq 0$ に対して

$$\mathrm{dis}_K(\varphi)=\sum_{m=0}^{m_0}\left(\frac{1}{2^m}\frac{\rho_K{}^{(m)}(\varphi)}{1+\rho_K{}^{(m)}(\varphi)}\right)+\sum_{m=m_0+1}^{\infty}\left(\qquad\right)$$

であるから，(2・5) を用いて

1) 実は定理自身のみならず，その証明の途中において得られることがら（定理 2・5 の形に述べる）も基本的なのである．

$$\mathrm{dis}_K\,(\varphi,0)\leqq\frac{\rho_K{}^{(m_0)}(\varphi)}{1+\rho_K{}^{(m_0)}(\varphi)}\cdot\sum_{m=0}^{m_0}2^{-m}+\sum_{m=m_0+1}^{\infty}2^{-m}$$

故に (2·13) から

$$\left.\begin{array}{l}\text{整数 } m_0=m_0(T,K)\geqq 0 \text{ と } \eta=\eta(T,K,m_0)>0 \text{ と}\\ \text{が存在して，} \varphi\epsilon(\mathfrak{D}_K) \text{ かつ } \sup\limits_{|p|\leqq m_0,\, x\epsilon K}|D^{(p)}\varphi(x)|\leqq\eta\\ \text{ならば } |(T(\varphi)|\leqq 1\end{array}\right\}\quad(2\cdot14)$$

の成り立つことがわかる．

第二段： 記号

$$\partial^s\varphi/\partial x^s=\partial^{ns}\varphi/\partial x_1{}^s\partial x_2{}^s\cdots\partial x_n{}^s \qquad (2\cdot15)$$

を導入すると，

$$\left.\begin{array}{l}\kappa=\kappa(\eta,m_0) \text{ が存在して，} \varphi\epsilon(\mathfrak{D}_K) \text{ かつ } \displaystyle\int_K|\partial^{m_0+1}\varphi(x)/\\ \partial x^{m_0+1}|^2dx\leqq\kappa \text{ ならば } \sup\limits_{|p|\leqq m_0,\, x\epsilon K}|D^{(p)}\varphi(x)|\leqq\eta\end{array}\right\}\quad(2\cdot16)$$

を証明することができる．コンパクト集合 K の二点間の距離の最大と 1 との大きいほうを t とする．Schwarz の不等式で

$$\int_K|\partial^{m_0+1}\varphi(x)/\partial x^{m_0+1}|dx\leqq\left(\int_K dx\cdot\int_K|\partial^{m_0+1}\varphi(x)/\partial x^{m_0+1}|^2dx\right)^{1/2}$$

が成り立つから

$$\left.\begin{array}{l}\varphi \text{ が (2·16) の条件を満足していれば}\\ \displaystyle\int_K|\partial^{m_0+1}\varphi(x)/\partial x^{m_0+1}|dx\leqq t^{n/2}\cdot\kappa^{1/2}\end{array}\right\}\quad(2\cdot17)$$

一方において $\psi(x)$ の台がコンパクトならば，$i=1,2,\cdots,n$ に対して

$$\psi(x_1,\cdots,x_n)=\int_{-\infty}^{x_i}\frac{\partial\psi(x_1,\cdots,x_{i-1},t,x_{i+1},\cdots,x_n)}{\partial t}dt$$

したがって

$$|\psi(x_1,\cdots,x_n)|\leqq\int_{-\infty}^{x_i}\left|\frac{\partial\psi(x_1,\cdots,x_{i-1},t,x_{i+1},\cdots,x_n)}{\partial t}\right|dt \quad (2\cdot18)$$

が成り立つ．よって

$$|\partial^{m_0}\varphi(x)/\partial x^{m_0}|\leqq\int_K\cdots\int|\partial^{m_0+1}\varphi(x)/\partial x^{m_0+1}|dx_1\cdots dx_n$$

が得られ，(2·17) から

$$\left.\begin{array}{l} \varphi \text{ が (2·16) の条件を満足していれば} \\ |\partial^{m_0}\varphi(x)/\partial x^{m_0}| \leqq t^{n/2}\cdot\kappa^{1/2} \end{array}\right\} \quad (2\cdot19)$$

故に再び (2·18) を繰返し用い，$t \geqq 1$ によって

$$\left.\begin{array}{l} \varphi \text{ が (2·16) の条件を満足しておれば} \\ \displaystyle\sup_{|p|\leqq m_0,\, x\in K} |D^{(p)}\varphi(x)| \leqq t^{n/2}\cdot\kappa^{1/2}\cdot t^{nm_0} \end{array}\right\} \quad (2\cdot20)$$

よって，κ を

$$\kappa \leqq \eta^2 t^{-2nm_0-n} \quad (2\cdot21)$$

の成り立つようにとるとよい．

結局，超函数 T とコンパクト集合 K とが与えられたとき

$$\left.\begin{array}{l} \text{整数 } m_0=m_0(T,K)\geqq 0 \text{ と } \kappa=\kappa(T,K,m_0)>0 \text{ とが存} \\ \text{在して，} \varphi\epsilon(\mathfrak{D}_K)\text{，} \displaystyle\int_K |\partial^{m_0+1}\varphi(x)/\partial x^{m_0+1}|^2 dx \leqq \kappa \text{ ならば} \\ |T(\varphi)| \leqq 1 \end{array}\right\} \quad (2\cdot22)$$

の成り立つことがわかった．

第三段： 各 $\varphi(x)\epsilon(\mathfrak{D}_K)$ に，同じく $(\mathfrak{D}_K)$ に属する

$$\psi(x)=\partial^{m_0+1}\varphi(x)/\partial x^{m_0+1}$$

を対応させる対応 $L\varphi=\psi$ は加法的であり：

$$L(\alpha_1\varphi_1+\alpha_2\varphi_2)=\alpha_1 L(\varphi_1)+\alpha_2 L(\varphi_2)$$

かつ1対1である．1対1であることは，(2·18)を繰返し用い，$\psi(x)\equiv 0$ ならば $\varphi(x)\equiv 0$ となることからわかる．故に

$$S(\psi)=T(L^{-1}\psi)=T(\varphi) \quad (2\cdot23)$$

によってベクトル空間

$$M=\{\psi\ ;\ \psi=L\varphi=\partial^{m_0+1}\varphi/\partial x^{m_0+1},\ \varphi\epsilon(\mathfrak{D}_K)\} \quad (2\cdot24)$$

の上で定義せられた加法的汎函数 $S(\psi)$ が定義せられる．この S は (2·22) によって

$$\|\psi\|_K=\left(\int_K |\psi(x)|^2 dx\right)^{1/2} \leqq \kappa^{1/2} \text{ ならば } |S(\psi)| \leqq 1 \quad (2\cdot25)$$

を満足する．

M はノルム $\|\psi\|_K$ によって pre–Hilbert 空間をつくるから，Riesz の定理（附録）が使えて次の事実がわかる．

$$\left.\begin{array}{l} K \text{ の上で定義せられた複素数値の可測函数 } f(x)=f(x;T, \\ K) \text{ で } \|f\|_K \leqq \kappa^{-1/2} \text{ なるものが存在して} \\ \qquad S(\psi)=\int_K f(x)\psi(x)dx \end{array}\right\} \quad (2\cdot 26)$$

以上総括して次の定理が得られ，したがって T が K においてその位数が高々 $n(m_0+1)$ であることがわかる．（終）

定理 2・5 任意の超函数 T と任意のコンパクト集合 $K \subseteqq R^n$ に対して，整数 $m_0=m_0(T,K)\geqq 0$ と $\kappa=\kappa(T,K,m_0)>0$ および $\|f\|_K=\left(\int_K |f(x)|^2 dx\right)^{1/2} \leqq \kappa^{-1/2}$ なる $f(x)=f(x;T,K,m_0)$ が定まって，

$$\varphi \in (\mathfrak{D}_K) \text{ に対しては } T(\varphi)=\int_K f(x)\frac{\partial^{m_0+1}\varphi(x)}{\partial x^{m_0+1}}dx \qquad (2\cdot 27)$$

注意 (2・27) は $\varphi\in(\mathfrak{D}_K)$ に対しては

$$T(\varphi)=(-1)^{n(m_0+1)}\frac{\partial^{m_0+1}T_{f_0}}{\partial x^{m_0+1}}(\varphi)$$

$$\text{ただし}\quad f_0(x)=\begin{cases} f(x), & x\in K \text{ のとき} \\ 0, & x\notin K \text{ のとき}\end{cases}$$

なることを示す．すなわち超函数は局所的には，局所可積分な[1)]函数によって定義せられた超函数の偏微分超函数に等しい．これが標題に掲げた“超函数の局所的構造”である．

2・3 1の分解

超函数の局所的性質からその全局的性質を導き出すのに **1の分解**(partition of unity) が役立つことがある．これを述べるために，まず次の定理を証明しよう．

定理 2・6 $\{U_\lambda; \lambda\in\Lambda\}$ を R^n の**開被覆** (open covering) とする．すなわち各 U_λ は R^n の開集合でかつ $\bigcup_{\lambda\in\Lambda} U_\lambda=R^n$ とする．この $\{U_\lambda; \lambda\in\Lambda\}$ に対して可算個の開集合 V_i からなる系 $\{V_i\}$ を次のように選ぶことができる．

---

1) Schwarz の不等式で $\int_K |f_0(x)|dx \leqq \left(\int_K dx\cdot\int_K |f_0(x)|^2 dx\right)^{1/2}$ となるから，$f_0(x)$ は局所可積分である．

i)　各 V_i はそれぞれある U_λ に含まれる.

ii)　$\bigcup_{i=1}^{\infty} V_i = R^n$

iii)　$\{V_i\}$ は**局所有限** (locally finite) である．すなわち，任意のコンパクト集合 $K \subseteqq R^n$ に対して K と交わるような V_i は有限個しかない.

iv)　各 V_i の閉苞はコンパクトである.

(証明)　R^n の開集合列 $X_1, X_2, \cdots$:

$$X_1 = \{x\,;\,|x| < 3\},\quad X_r = \{x\,;\,r-1 < |x| < r+2\} \qquad (r=2,3,\cdots)$$

および R^n の閉集合列 $Y_1, Y_2, \cdots$:

$$Y_1 = \{x\,;\,|x| \leqq 2\},\quad Y_r = \{x\,;\,r \leqq |x| \leqq r+1\} \qquad (r=2,3,\cdots)$$

をつくると

$$X_i \supseteqq Y_i \ (i=1,2,\cdots) \quad \text{かつ} \quad \bigcup_{i=1}^{\infty} Y_i = R^n$$

である．Y_i はコンパクトだから，これは有限個の U_λ で被覆される．これらを $U_{ij}\ (j=1,2,\cdots,h_i)$ とすると

$$Y_i \subseteqq \bigcup_{j=1}^{h_i} U_{ij}$$

ここにおいて

$$V_{ij} = U_{ij} \cap X_i$$

とおけば

$$\bigcup_{j=1}^{h_i} V_{ij} \supseteqq X_i \quad \text{したがって} \quad \bigcup_{i,j} V_{ij} = R^n$$

であり，また明らかに $V_{ij} \subseteqq U_{ij}$, $V_{ij} \subseteqq X_i$ である．よって $\{V_{ij}\}$ の添数をつけ換えて $\{V_i\}$ とすれば，各 Y_i と交わる V_{ij} が h_i 個しかなかったことから，$\{V_i\}$ は局所有限でありまた各 V_i の閉苞はコンパクトである.（終）

系　上定理の各 V_i の中にコンパクトな部分集合 W_i をとって $\{W_i\}$ は局所有限かつ $\bigcup_{i=1}^{\infty} W_i = R^n$ なるようにできる.

(証明)　$R^n - \bigcup_{i \neq 1} V_i = F_1 \subseteqq V_1$.　F_1 は閉集合，かつ開集合 V_1 はある X_i に含まれかつ X_i の閉苞はコンパクトであるから，開集合 W_1' およびその閉苞 W_1 を

$$F_1 \subseqq W_1' \subseqq W_1 \subseqq V_1, \quad W_1 \text{ はコンパクト集合}$$

を満足するようにとれる.

次に V_1 の代りに W_1' をとり，これを改めて V_1 と書き，$R^n - \bigcup_{i \neq 2} V_i = F_2 \subseqq V_2$ とし，開集合 W_2' およびその閉苞 W_2 を

$$F_2 \subseqq W_2' \subseqq W_2 \subseqq V_2, \quad W_2 \text{ はコンパクト集合}$$

を満足するようにとる．以下同様にして $W_3, \cdots$ をとってゆけばよい．(終)

定理 2·7　$\{U_\lambda ; \lambda \in \Lambda\}$ を R^n の開被覆とすれば，可算個の函数 $\{\varphi_i(x)\} \subseqq (\mathfrak{D}_{R^n})$ を次の条件を満足するようにとれる．

i) 各 $\varphi_i(x)$ の台はある U_λ に含まれる．

ii) $0 \leqq \varphi_i(x) \leqq 1$ $(i=1,2,\cdots)$ かつ $\sum_{i=1}^{\infty} \varphi_i(x) \equiv 1.$

iii) $\{\mathrm{car.}(\varphi_i)\}$ は局所有限である．

(証明) 前定理および系を用いる．コンパクト集合 W_i と W_i を含む開集合 V_i の境界との距離を $2\varepsilon_i$ とする．すなわち W_i の点と V_i の点との距離のこれらの点を動かしたときの下限を $2\varepsilon_i$ とする．明らかに $\varepsilon_i > 0$ である．W_i の各点 y を中心として半径 ε_i の開球 $S(y, \varepsilon_i) = \{x; |x-y| < \varepsilon_i\}$ を考える．W_i はコンパクトであるから，これら開球の有限個で被覆される．これらの開球を

$$S(y_{i1}, \varepsilon_i), S(y_{i2}, \varepsilon_i), \cdots, S(y_{im_i}, \varepsilon_i)$$

とする．各 $S(y_{ij}, \varepsilon_i)$ に対して，(1·1) と同じように

$$\varphi(x; y_{ij}) = \begin{cases} 0, & |x-y_{ij}| \geqq \varepsilon_i \text{ のとき} \\ \exp\left(1/(|x-y_{ij}|^2 - \varepsilon^2{}_i)\right), & |x-y_{ij}| < \varepsilon_i \text{ のとき} \end{cases}$$

をつくり

$$\sum_{j=1}^{m_i} \varphi(x; y_{ij}) = \hat{\varphi}_i(x)$$

とおけば，$\hat{\varphi}_i(x) \in (\mathfrak{D}_{R^n})$ かつ

$$\hat{\varphi}_i(x) \begin{cases} >0, & x \in W_i \text{ のとき} \\ =0, & x \text{ と } W_i \text{ との距離 } > \varepsilon_i \text{ のとき} \end{cases}$$

よって，とくに $\mathrm{car.}(\hat{\varphi}_i) \subseqq V_i$，したがって $\mathrm{car.}(\hat{\varphi}_i)$ はある U_λ に含まれる．

$\{V_i\}$ は局所有限な R^n の被覆であるから，無限級数

$$\psi(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \hat{\varphi}_i(x)$$

は，x をコンパクト集合の上に動かすとき有限和になり，したがって $\psi(x)$ は無限回微分可能である． また各 $\hat{\varphi}_i(x)$ は $\geqq 0$ かつ W_i で $\hat{\varphi}_i(x)>0$ しかも $\bigcup_{i=1}^{\infty} W_i=R^n$ であるから，R^n の上至る所 $\psi(x)>0$ である．よって

$$\varphi_i(x)=\hat{\varphi}_i(x)/\psi(x)$$

とすればよい．（終）

2·4 超 函 数 の 台

超函数 T が点 x^0 の**近傍**[1]で 0 であるというのは，x^0 を含むある近傍 $U(x^0)$ が存在して，$\varphi\in(\mathfrak{D}_{R^n})$ の $\mathrm{car.}(\varphi)\subseteqq U(x^0)$ ならば $T(\varphi)=0$ となることをいう．例えば局所可積分な $f(x)$ が x^0 の近傍で恒等的に 0 であれば，超函数 T_f は x^0 の近傍で 0 である．

定理 2·8 超函数 T が，R^n の開集合 U に属する各点の近傍で 0 ならば，T は U において 0 である．すなわち $\mathrm{car.}(\varphi)\subseteqq U$ なる $\varphi\in(\mathfrak{D}_{R^n})$ に対してつねに $T(\varphi)=0$ である．

（証明） 各 $x^0\in U$ に対して U に含まれるような x^0 の近傍 $U(x^0)$ をとって $\mathrm{car.}(\varphi)\subseteqq U(x^0)$ ならば $T(\varphi)=0$
が成り立つようにできる．

$\{U(x)\,;\,x\in U\}$ は U の開被覆である．すなわち $U=\bigcup_{x\in U} U(x)$，このとき次のような可算個の函数 $\{\varphi_i(x)\}\subseteqq(\mathfrak{D}_{R^n})$ をつくることができる：

i) 各 $\varphi_i(x)$ の台はある $U(x^0)$ に含まれる．

ii) $0\leqq\varphi_i(x)\leqq 1$ $(i=1,2,\cdots)$ かつ $x\in U$ ならば $\sum_{i=1}^{\infty}\varphi_i(x)=1.$

iii) $\{\mathrm{car.}(\varphi_i)\}$ は U 内で局所有限である．

この証明は前定理と同じようにしてできる（読者試みられよ）．

次に $\mathrm{car.}(\varphi)\subseteqq U$ ならば ii) から

$$T(\varphi)=T((\sum_{i=1}^{\infty}\varphi_i(x))\cdot\varphi(x))$$

であるが，iii) によって $\sum_{i=1}^{\infty}\varphi_i(x)\cdot\varphi(x)$ は任意のコンパクト集合 $\subseteqq U$ の

1) x^0 を含む開集合を近傍という．

上で有限和になる．よって T の加法性から

$$T(\varphi)=\sum_{i=1}^{\infty} T(\varphi_i\cdot\varphi)$$

しかも i) によって $\mathrm{car.}(\varphi_i\varphi)\subseteqq \mathrm{car.}(\varphi_i)$ はある $U(x^0)$ に含まれるから，$U(x^0)$ のとりかたによって $T(\varphi_i\varphi)=0$.

故に結局 $\mathrm{car.}(\varphi)\subseteqq U$ ならば $T(\varphi)=0$ である．(終)

超函数の台　超函数 T が与えられたとき，T がその上で0になるような開集合の全体の和集合を考えると，Tはこの和集合の上で0になることが上定理からわかる．この和集合——明らかに開集合である——の補集合を T の**台** (carrier, support) といい $\mathrm{car.}(T)$ で表わす．

2·5　台がコンパクトな超函数

T_δ の台は原点0のみからなる．超函数の台がコンパクトであるとは限らないことは，階数の定義への注意の所で挙げた例をみるとわかる．その台がコンパクトであるような超函数は次に述べるように，特別の類をなしているのである．そのためにまず次の定義を与える．

$(\mathfrak{E}_{R^n})$ の定義　R^n で定義せられた無限回偏微分可能な函数 $\varphi(x)$ の全体 $(\mathfrak{E}_{R^n})$ は算法

$$(\varphi+\psi)(x)=\varphi(x)+\psi(x),\qquad (\alpha\varphi)(x)=\alpha\varphi(x)$$

でベクトル空間をつくる．$(\mathfrak{E}_{R^n})$ の函数列 $\{\varphi_h(x)\}$ の恒等的に0なる函数0への収束を次のように定義する：

$\varphi_h(x)$ およびそのすべての偏導函数 $\dfrac{\partial\varphi_h(x)}{\partial x_i}$, $\dfrac{\partial^2\varphi_h(x)}{\partial x_i\partial x_j}$, $\cdots$ がいずれも，任意のコンパクト集合 K の上で一様に0に収束する．　(2·28)

このとき

$$\varphi_h \Longrightarrow 0\ ((\mathfrak{E}_{R^n}))\ \text{または}\ \lim_{h\to\infty}\varphi_h=0\ ((\mathfrak{E}_{R^n}))$$

と書く．

定理 2·9　$(\mathfrak{E}_{R^n})$ は

$$\left.\begin{aligned} &\mathrm{dis}_E(\varphi,\psi)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2^k}\frac{\mathrm{dis}_{E,k}(\varphi,\psi)}{1+\mathrm{dis}_{E,k}(\varphi,\psi)},\\ \text{ただし}\quad &\mathrm{dis}_{E,k}(\varphi,\psi)=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{2^m}\frac{\rho_k{}^{(m)}(\varphi-\psi)}{1+\rho_k{}^{(m)}(\varphi-\psi)}\\ \text{ここに}\quad &\rho_k{}^{(m)}(\varphi-\psi)=\sup_{|p|\leqq m,\,|x|\leqq k}|D^{(p)}(\varphi(x)-\psi(x))| \end{aligned}\right\}\quad(2\cdot29)$$

によって完備な距離空間になり，かつ $\varphi_h\Longrightarrow 0$ $((\mathfrak{E}_{R^n}))$ と $\lim_{h\to\infty}\mathrm{dis}_E(\varphi_h,0)=0$ とは同等である．

（証明は $(\mathfrak{D}_K)$ の場合と殆んど同じようにしてなされるから読者の演習問題として残すことにする）．

$(\mathfrak{D}_{R^n})'$ および $(\mathfrak{E}_{R^n})'$ の定義　超函数 T は，$(\mathfrak{D}_{R^n})$ の上で定義せられた加法的かつ連続な汎函数として定義せられた．以下超函数の全体を $(\mathfrak{D}_{R^n})'$ と書いて $(\mathfrak{D}_{R^n})$ の**双対空間** (dual space) とよぶ．同様にして $(\mathfrak{E}_{R^n})$ で定義せられた加法的かつ連続な汎函数 T：

$$\lim_{h\to\infty}\varphi_h=0\ ((\mathfrak{E}_{R^n}))\ \text{ならば}\ \lim_{h\to\infty}T(\varphi_h)=0$$

を考え，かかるものの全体すなわち $(\mathfrak{E}_{R^n})$ の双対空間を $(\mathfrak{E}_{R^n})'$ で表わすことにする．このとき

定理 2·10　コンパクトな台をもつ超函数の全体は $(\mathfrak{E}_{R^n})'$ と一致させることができる．

（説明かつ証明）car.$(T)=K$ がコンパクト集合 $\subseteqq R^n$ とする．$\alpha(x)\in(\mathfrak{D}_{R^n})$ を K を含むある開集合 U の上で恒等的に 1 なる函数とする．もちろん U の閉苞はコンパクトなものでなければならない．1 の任意の分解 $\{\varphi_i(x)\}$ をとり，

$$\alpha(x)=\sum_{\mathrm{car.}(\varphi_i)\cap U\neq\phi}\varphi_i(x)$$

をつくれば，これは上の条件を満足する $\alpha(x)$ の例の一つである．

任意の $\varphi\in(\mathfrak{E}_{R^n})$ に対して $\alpha(x)\varphi(x)\in(\mathfrak{D}_{R^n})$ となるから，$T(\alpha\varphi)$ は意味をもつ．

$$T(\alpha\varphi)=F(\varphi)\tag{2·30}$$

の値は α のとりかたに関係しない．$\alpha_1(x)$ を $\in(\mathfrak{D}_{R^n})$ かつ K を含む他の開

集合で $\equiv 1$ となるものとすれば

$$T(\alpha\varphi)-T(\alpha_1\varphi)=T(\alpha\varphi-\alpha_1\varphi)=T((\alpha-\alpha_1)\varphi)$$

となるが，K においては $(\alpha(x)-\alpha_1(x))\varphi(x)\equiv 0$ となるために car.$(T)=K$ ということから $T((\alpha-\alpha_1)\varphi)=0$ となるからである.

F は $(\mathfrak{E}_{R^n})$ で加法的であるのみならず連続である. $\varphi_h \Longrightarrow 0$ $((\mathfrak{E}_{R^n}))$ ならば，容易[1]にわかるように $\alpha\varphi_h \Longrightarrow 0$ $((\mathfrak{D}_{R^n}))$ であるからである. よって (2·30) により，コンパクトな台をもつ $T\epsilon(\mathfrak{D}_{R^n})'$ に対し，一意的に $F\epsilon(\mathfrak{E}_{R^n})'$ が対応する.

次に任意の $F\epsilon(\mathfrak{E}_{R^n})'$ は，試料函数 φ を $(\mathfrak{D}_{R^n})$ 内に限ったとき，$\epsilon(\mathfrak{D}_{R^n})'$ であると考えてよい. $\varphi\epsilon(\mathfrak{D}_{R^n})$ ならばもちろん $\varphi\epsilon(\mathfrak{E}_{R^n})$ であり，かつ $\varphi_h \Longrightarrow 0$ $((\mathfrak{D}_{R^n}))$ ならば $\varphi_h \Longrightarrow 0$ $((\mathfrak{E}_{R^n}))$ であるからである. このように試料函数 φ を $(\mathfrak{D}_{R^n})$ 内に限った F——これを T と書く——がコンパクトな台をもつことをいえば定理の説明かつ証明が終ったことになる.

ところがもし car.(T) がコンパクトでないとしたら，任意の正整数 m に対して car.(T) は $\{x;|x|\leqq m\}$ 以外の点を含む. よって car.(T) の定義から $(\mathfrak{D}_{R^n})$ の函数 $\varphi_m(x)$ で

$$|x|\leqq m \text{ では } \varphi_m(x)=0 \text{ かつ } T(\varphi_m)\neq 0$$

なるものがある. よって $\psi_m(x)=\varphi_m(x)/T(\varphi_m)\epsilon(\mathfrak{D}_{R^n})$ は

$$|x|\leqq m \text{ では } \psi_m(x)\equiv 0 \text{ かつ } T(\psi_m)=1$$

を満足する. 明らかに $\psi_m \Longrightarrow 0$ $((\mathfrak{E}_{R^n}))$ であるから，$F(\psi_m)=T(\psi_m)=1$ が $m\to\infty$ なるとき 0 に収束しなければならないことになって不合理である.（終）

上の証明中に示したように，コンパクトな閉苞 K_1 をもつ開集合 $U_1\supseteqq$(U の閉苞) $\supseteqq$car.(T) に対して $(\mathfrak{D}_{K_1})$ をつくると，任意の $\varphi\epsilon(\mathfrak{E}_{R^n})$ に対して $\alpha\varphi\epsilon(\mathfrak{D}_{K_1})$ である. 故に定理 2.5 によって，整数 $p=p(T,K_1)\geqq 0$ と $\kappa=\kappa$

1) $D^{(p)}\alpha\varphi_h$ は，Leibniz の公式で α および φ_h の高々 $|p|$ 回の偏導函数の積の有限個の和になる： $D^{(p)}\alpha\varphi=\sum_{q\leqq p}C^p_q D^{p-q}\alpha\cdot D^{(q)}\varphi$. $q\leqq p$ は $q_i\leqq p_i$ $(i=1,2,\cdots,n)$ の意味.

(T, K_1, p) および car.$(f) \subseteqq K_1$ かつ $\|f\|_{K_1} = \left(\int_{K_1} |f(x)|^2 dx\right)^{1/2} \leqq \kappa^{1/2}$ なる $f(x) = f(x;\ T, K_1, p)$ が定まって

$$F(\varphi) = T(\alpha\varphi) = \int_{K_1} f(x)(D^{(p)} \cdot \alpha\varphi)(x)dx$$

$D^{(p)}\alpha\varphi$ に Leibniz の公式（前頁脚註）を適用して

$$F(\varphi) = T(\alpha\varphi) = \sum_{q \leqq p} C_q^p \int f(x) D^{(p-q)}\alpha(x) \cdot D^{(q)}\varphi(x)dx$$

$$= \sum_{q \leqq p} (-1)^{|q|} D^{(q)} T_{f \cdot D^{(p-q)}\alpha}(\varphi)$$

を得る．car.$(f \cdot D^{(p-q)}\alpha) \subseteqq$ car.$(f) \subseteqq K_1$ であるから，次の定理が得られる．

定理 2·11 超函数 T の台がコンパクトならば，T は

$$T = \sum_{q \leqq p} D^{(q)} T_{f_q(x)} \tag{2·31}$$

と表わされる．ここに函数 $f_q(x)$ の台はいずれも T の台の任意の近傍に含まれるようにとることができる．よってもちろん T は R^n において階数有限 $(\leqq |p|)$ である．

これを用いて**一点を台とする超函数の形**がわかる．すなわち

定理 2·12 超函数 T が原点 $x=0$ を台とするための必要かつ十分な条件は，T が

$$T = \sum_{|q| \leqq |p|} c_q D^{(q)} T_\delta, \qquad c_q = \text{定数} \tag{2·32}$$

の形に表わされることである．

（証明） 必要であることをいえばよい．前定理によって T の階数は有限である．これを $|p|$ とすると $(\mathfrak{D}_{R^n})$ の函数列 $\{\varphi_h(x)\}$ が，条件：

$$\left.\begin{array}{l}|D^q\varphi_h(x)|\ (|q| \leqq |p|) \text{ のすべてが } h \to \infty \text{ なるとき } R^n \text{ に} \\ \text{おいて一様に 0 に収束する}\end{array}\right\}$$

を満足するならば，$\lim_{h \to \infty} T(\varphi_h) = 0$ となる．

任意の $\psi(x) \in (\mathfrak{D}_{R^n})$ に対して Taylor 展開で

$$\psi(x) = \sum_{|q| \leqq |p|} \frac{x_1^{q_1} \cdots x_n^{q_n}}{q_1! \cdots q_n!} (D^{(q)}\psi(x))_{x=0} + \varphi(x)$$

とおくと

$$(D^{(q)}\varphi(x))_{x=0}=0 \qquad (|q|\leqq|p|) \tag{2·33}$$

である．したがって (2·33) から $T(\varphi)=0$ がいえれば

$$T(\psi)=\sum_{|q|\leqq|p|}T\left(\frac{x_1^{q_1}\cdots x_n^{q_n}}{q_1!\cdots q_n!}\right)\cdot(D^{(q)}\psi(x))_{x=0}$$

がいえて，(2·32) がいえたことになる．

(2·33) から $T(\varphi)=0$ を導くこと．

第一段： (2·33) から

$$\sup_{|q|\leqq|p|,\,|x|\leqq 1/h}|D^{(q)}\varphi(x)|=\eta(h) \text{ は} \to 0 \quad (h\to\infty)$$

故に $(D^{(p)}\varphi(x))_{x=0}=0$ から得られる

$$\frac{\partial^{p_1-1+p_2+\cdots+p_n}\varphi(x)}{\partial x_1^{p_1-1}\partial x_2^{p_2}\cdots\partial x_n^{p_n}}=\int_0^{x_1}D^{(p)}\varphi(t,x_2,\cdots,x_n)dt$$

によって

$$\sup_{|x|\leqq 1/h}\left|\frac{\partial^{p_1-1+p_2+\cdots+p_n}\varphi(x)}{\partial x_1^{p_1-1}\partial x_2^{p_2}\cdots\partial x_n^{p_n}}\right|\leqq\frac{1}{h}\eta(h)$$

これを繰返し用いて，$|m|\leqq|p|$ ならば

$$\sup_{|x|\leqq 1/h}|D^{(m)}\varphi(x)|\leqq\eta(h)\left(\frac{1}{h}\right)^{|p|-|m|} \tag{2·34}$$

第二段： $\alpha(x)\in(\mathfrak{D}_{R^n})$ を

$$\alpha(x)=\begin{cases}1, & |x|\leqq\dfrac{1}{2} \text{ なるとき}\\ 0, & |x|\geqq 1 \text{ なるとき}\end{cases} \tag{2·35}$$

とすると，$\alpha_h(x)=\alpha(hx)$ に対して

$$D^{(q)}\alpha_h(x)=h^{|q|}(D^{(q)}\alpha(y))_{y=hx}$$

したがって正の定数 e_q で

$$\sup_{|x|\leqq 1/h}|D^{(q)}\alpha_h(x)|=\sup_{x\in R^n}|D^{(q)}\alpha_h(x)|\leqq h^{|q|}e_q \tag{2·36}$$

ここにおいて

$$\varphi_h(x)=\alpha_h(x)\varphi(x) \tag{2·37}$$

とおくと Leibniz の公式で

$$D^{(r)}\varphi_h(x)=\sum_{q\leqq r}C_q^r D^{(r-q)}\alpha_h(x)\cdot D^{(q)}\varphi(x)$$

故に car.$(\varphi_h)\subseteqq$car.$(\alpha_h)\subseteqq\left\{x\,;\,|x|\leqq\dfrac{1}{h}\right\}$ を用い，(2·34) と (2·36) とから，$|r|\leqq|p|$ として

$$\sup_{x\in R^n}|D^{(r)}\varphi_h(x)|=\sup_{|x|\leqq 1/h}|D^{(r)}\varphi_h(x)|$$

$$\leqq\sum_{q\leqq r}C_q^r e_{r-q}h^{|r-q|}\cdot|h|^{-|p|+|q|}\eta(h)$$

$r\geqq q$ であるから $|r-q|=|r|-|q|$ で，$\eta(h)\to 0$ $(h\to\infty)$ によって

$$\sup_{x\in R^n}|D^{(r)}\varphi_h(x)|\to 0\ (h\to\infty),\quad |r|\leqq|p|$$

を得て，証明の冒頭に述べたことから

$$\lim_{h\to\infty}T(\varphi_h(x))=0,\ \text{すなわち}\ \lim_{h\to\infty}T(\alpha(hx)\varphi(x))=0$$

である．

ところが $\alpha(hx)$ の台は $|x|\leqq\dfrac{1}{h}$ に含まれかつ $|x|\leqq\dfrac{1}{2h}$ で $\alpha(hx)=1$，しかも T の台が原点だけであるから

$$T(\varphi)=T(\alpha(hx)\varphi(x))\quad(h=1,2,\cdots)$$

よって $T(\varphi)=0$ がいえた．(終)

系 T_{δ_h} を

$$T_{\delta_h}(\varphi)=\varphi(h)\tag{2·38}$$

によって定義すると，T が一点 $x=h$ のみを台とする超函数であるための必要かつ十分な条件は，T が

$$T=\sum_{|q|\leqq p}c_q D^{(q)}T_{\delta_h}\tag{2·39}$$

の形に表わされることである．

第3章　有界集合

3.1 Arzelà–Ascoli の定理

R^n のコンパクト集合 K の上で定義された複素数値函数列 $\{\varphi_h(x)\}$ が**同程度に有界** (equi-bounded)：

$$\sup_{1\leqq h,\, x\in K} |\varphi_h(x)| < \infty \tag{3·1}$$

かつ **同程度に連続** (equi-continuous)：

$$\lim_{\delta\downarrow 0}\{\sup_{1\leqq h,\, \delta\geqq |x^{(1)}-x^{(2)}|} |\varphi_h(x^{(1)})-\varphi_h(x^{(2)})|\}=0 \tag{3·2}$$

ならば，適当な部分列 $\{\varphi_{h'}(x)\}$ を選んで K において一様収束させることができる．**[Arzelà–Ascoli の定理]**

（証明） K の有理点，すなわちその各座標 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ がすべて有理数であるような K の点 $x=(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ は可算であるから，これらを

$$r^{(1)}, r^{(2)}, r^{(3)}, \cdots$$

のように並べることができる．数列

$$\varphi_1(r^{(1)}),\ \varphi_2(r^{(1)}),\ \varphi_3(r^{(1)}), \cdots$$

は (3·1) によって有界数列であるから，Bolzano–Weierstrass の定理によって収束する部分列

$$\varphi_{11}(r^{(1)}),\ \varphi_{21}(r^{(1)}),\ \varphi_{31}(r^{(1)}), \cdots$$

をもつ．同じく数列

$$\varphi_{11}(r^{(2)}),\ \varphi_{21}(r^{(2)}),\ \varphi_{31}(r^{(2)}), \cdots$$

も収束する部分列

$$\varphi_{12}(r^{(2)}),\ \varphi_{22}(r^{(2)}),\ \varphi_{32}(r^{(2)}), \cdots$$

を含む．以下同様に繰返して

$$\varphi_{1h}(x),\ \varphi_{2h}(x), \cdots,\ \varphi_{kh}(x), \cdots \quad (\varphi_{k0}(x)=\varphi_k(x))$$

が

$$\varphi_{1,h-1}(x),\ \varphi_{2,h-1}(x),\cdots,\ \varphi_{k,h-1}(x),\cdots$$

の部分函数列であり，かつ $\{\varphi_{kh}(x)\}_{k=1,2,\cdots}$ が $x=r^{(1)},r^{(2)},\cdots r^{(h)}$ において収束するようにできる．よって

$$\varphi_h'(x)=\varphi_{hh}(x)$$

とおけば，$\{\varphi_h(x)\}$ の部分函数列 $\{\varphi_{h'}(x)\}$ は，$x=r^{(1)},r^{(2)},\cdots$ において，すなわち K の有理点のすべてにおいて収束する．

(3·2) によって任意の $\varepsilon>0$ に対して $\delta=\delta(\varepsilon)>0$ を定めて

$$\left.\begin{array}{l}|x^{(1)}-x^{(2)}|\leqq\delta \text{ なる限りすべての } h \text{ に対し}\\ \qquad |\varphi_h(x^{(1)})-\varphi_h(x^{(2)})|\leqq\varepsilon\end{array}\right\}$$

が成り立つようにできる．有理点の稠密性から $N=N(\delta)$ を十分大きくとれば，K の任意の点 x に対して

$$\min_{1\leqq k\leqq N}|x-r^{(k)}|\leqq\delta$$

とできる．また $\{\varphi_{h'}(x)\}$ が $x=r^{(1)},r^{(2)},\cdots,r^{(N)}$ において収束するから十分大きな $M=M(\varepsilon)$ に対し

$$m,t\geqq M,\ 1\leqq k\leqq N \text{ ならば } |\varphi_m(r^{(k)})-\varphi_t(r^{(k)})|<\varepsilon$$

とできる．よって各 $m,t\geqq M$ および各 $x\in K$ に対して適当に $r^{(k)}$ $(1\leqq k\leqq N)$ をとって

$$|\varphi_{m'}(x)-\varphi_{t'}(x)|\leqq|\varphi_{m'}(x)-\varphi_{m'}(r^{(k)})|+|\varphi_{m'}(r^{(k)})-\varphi_{t'}(r^{(k)})|$$
$$+|\varphi_{t'}(r^{(k)})-\varphi_{t'}(x)|\leqq3\varepsilon$$

ならしめ得る．すなわち $\{\varphi_{h'}(x)\}$ は K において一様収束する．

注意 もしも各 $\varphi_h(x)$ が一回連続偏微分可能で

$$\sup_{1\leqq h,\,1\leqq i\leqq n,\,x\in K}|\partial\varphi_h(x)/\partial x_i|<\infty$$

ならば，$\{\varphi_h(x)\}$ は同程度に連続である．

(証明) 平均値の定理

$$\varphi_h(x_1+\delta_1,x_2+\delta_2,\cdots,x_n+\delta_n)-\varphi_h(x_1,x_2,\cdots,x_n)$$
$$=\sum_{i=1}^n\delta_i\cdot\frac{\partial\varphi_h}{\partial x_i}(x_1+\theta\delta_1,\cdots,x_n+\theta\delta_n),\quad 0<\theta<1$$

から明らかである．(終)

3.2 $(\mathfrak{D}_{R^n})$ の有界集合

$(\mathfrak{D}_{R^n})$ の有界集合 $(\mathfrak{D}_{R^n})$ の部分集合 $\mathfrak{B}$ は次の条件を満足するときに（$(\mathfrak{D}_{R^n})$ の）**有界集合**（bounded set）であるといわれる．

i) あるコンパクト集合 K に対して $\mathfrak{B}\subseteqq(\mathfrak{D}_K)$

ii) すべての $D^{(p)}$ に対して $\sup_{\varphi\in\mathfrak{B},\, x\in K}|D^{(p)}\varphi(x)|<\infty$

定理 3・1 $(\mathfrak{D}_{R^n})$ の部分集合 $\mathfrak{B}$ が $(\mathfrak{D}_{R^n})$ における収束$\Longrightarrow$の意味で相対コンパクトであるための必要かつ十分な条件は $\mathfrak{B}$ が有界集合であることである．

（証明） 十分なこと： まず i) から各 $\varphi\in\mathfrak{B}$ に対して $\mathrm{car.}(\varphi)\subseteqq K$. 次に ii) から前定理注意を用い，$K$ において一様収束する $\mathfrak{B}$ の部分列 $\{\varphi_h(x)\}$ を選ぶことができる．同じく $\{\varphi_h(x)\}$ の部分列 $\{\varphi_{h'}(x)\}$ を選んで $\{\partial\varphi_{h'}/\partial x_1\}$ が K において一様収束するようにできる．同じように $\{\varphi_{h'}(x)\}$ の部分列 $\{\varphi_{h''}(x)\}$ を選んで $\{\partial\varphi_{h''}/\partial x_2\}$ が K において一様収束するようにできる．以下同様に繰返して対角線論法で，すべての $D^{(p)}$ に対して $\{D^{(p)}\varphi_{h(\infty)}(x)\}$ が K において一様収束するような函数列 $\{\varphi_{h(\infty)}(x)\}$ を選ぶことができることがわかる．

必要なこと： $\mathfrak{B}$ が i) を満足しないとすると $\{\varphi_h(x)\}\subseteqq\mathfrak{B}$ を

$$\mathrm{car.}(\varphi_h)\ni x^{(h)},\ |x^{(h)}|\geqq h \qquad (h=1,2,\cdots)$$

なるように選ぶことができる．そうすると $\{\varphi_h(x)\}$ のいかなる部分列 $\{\varphi_{h'}(x)\}$ も $\varphi\in(\mathfrak{D}_{R^n})$ に対して $\varphi-\varphi_{h'}\Longrightarrow 0\ ((\mathfrak{D}_{R^n}))$ とならない．$\mathrm{car.}(\varphi-\varphi_h)$, $(h=1,2,\cdots)$ は一定のコンパクト集合に入らないからである．同じく $\mathfrak{B}$ が i) を満足するが ii) を満足しないとすれば，ある $D^{(p_0)}$ に対して $\{\varphi_h(x)\}\subseteqq\mathfrak{B}$ を

$$\sup_{x\in K}|D^{(p_0)}\varphi_h(x)|\geqq h \qquad (h=1,2,\cdots)$$

なるようにとれる．そうすると $\{\varphi_h(x)\}$ のいかなる部分列 $\{\varphi_{h'}(x)\}$ も $\varphi\in(\mathfrak{D}_{R^n})$ に対して $\varphi-\varphi_{h'}\Longrightarrow 0((\mathfrak{D}_{R^n}))$ を満足しない．

$$\sup_{x\in K}|D^{(p_0)}(\varphi_{h'}(x)-\varphi(x))|\geqq\sup_{x\in K}|D^{(p_0)}\varphi_{h'}(x)|-\sup_{x\in K}|D^{(p_0)}\varphi(x)|$$

$$\geqq h-\sup_{x\in K}|D^{(p_0)}\varphi(x)|$$

であるからである.

定理 3·2 $(\mathfrak{D}_{R^n})$ の函数列 $\{\varphi_h(x)\}$ が $\varphi_h\Longrightarrow 0((\mathfrak{D}_{R^n}))$ を満足するための必要かつ十分な条件は，適当に $\lim_{h\to\infty} m_h=\infty$ なる正数列 $\{m_h\}$ をとって，$\{m_h\varphi_h(x)\}$ が有界集合となるようにできることである.

（証明） 必要なこと： $\varphi_h\Longrightarrow 0\,((\mathfrak{D}_{R^n}))$ であるからコンパクト集合 $K\subseteqq R^n$ に対して $\varphi_h\in(\mathfrak{D}_K)$, $(h=1,2,\cdots)$, かつ

$$d_K(\varphi_h,0)=\sum_{m=0}^{\infty}2^{-m}\frac{\rho_K{}^{(m)}(\varphi_h)}{1+\rho_K{}^{(m)}(\varphi_h)}=\varepsilon_h\to 0\quad(h\to\infty)$$

が成り立たねばならない.

$$m_h=\begin{cases}\varepsilon_h{}^{-1}, & \varepsilon_h\neq 0 \text{ のとき}\\ h, & \varepsilon_h=0 \text{ のとき}\end{cases}$$

ととれば，$m_h\to\infty$ $(h\to\infty)$ である.

$$\frac{\rho_K{}^{(s)}(\varphi_h)}{1+\rho_K{}^{(s)}(\varphi_h)}\leqq 2^s\varepsilon_h\leqq 2^s\cdot m_h{}^{-1}$$

であるから

$$\sup_{|p|\leqq s,\,x\in K}|D^{(p)}\varphi_h(x)|=\rho_K{}^{(s)}(\varphi_h)\leqq\frac{2^s m_h{}^{-1}}{1-2^s m_h{}^{-1}}$$

$(2^s m_h{}^{-1}<1$ が成立つような h に対して)

よって各 s に対して

$$\sup_{h\geqq 1,\,|p|\leqq s,\,x\in K}|D^{(p)}m_h\varphi_h(x)|\leqq\sup_{h\geqq 1}\frac{2^s}{1-2^s m_h{}^{-1}}<\infty$$

である.

十分なこと： $m_h\to\infty$ $(h\to\infty)$ かつ $\{m_h\varphi_h(x)\}$ が有界集合であるとすると，まず car.$(\varphi_h)\subseteqq K$ なるコンパクト集合 $K\subseteqq R^n$ が存在する．次に ii) によって

$$\sup_{h\geqq 1,\,|p|\leqq s,\,x\in K}|D^{(p)}m_h\varphi_h(x)|=M_s<\infty$$

であるから

$$\sup_{|p|\leqq s,\,x\in K}|D^{(p)}\varphi_h(x)|\leqq\frac{M_s}{m_h}\to 0\quad(h\to\infty)$$

で，$\varphi_h \Longrightarrow 0$ $((\mathfrak{D}_{R^n}))$ である．(終)

有界集合の概念を使えば $(\mathfrak{D}_{R^n})$ の上の加法的汎函数 T の連続性を次の定理におけるように定義することができる．

定理 3·3 $(\mathfrak{D}_{R^n})$ の上で定義された加法的汎函数 T が連続であるための必要かつ十分な条件は，T が $(\mathfrak{D}_{R^n})$ の任意の有界集合 $\mathfrak{B}$ の上では有界なことすなわち

$$\sup_{\varphi \in \mathfrak{B}} |T(\varphi)| < \infty \tag{3·3}$$

の成り立つことである．

(証明) 必要なこと： もし T が $\mathfrak{B}$ の上で有界でないとすると，$\mathfrak{B}$ の函数列 $\{\varphi_h\}$ で $|T(\varphi_h)| > h$ $(h=1,2,\cdots)$ を満足するものがある．$\{\varphi_h\} = \{h(h^{-1}\varphi_h)\}$ が有界 $(\subseteqq \mathfrak{B})$ であるから，前定理によって $h^{-1}\varphi_h \Longrightarrow 0$ $((\mathfrak{D}_{R^n}))$ となり，T の連続性によって

$$T(h^{-1}\varphi_h) = h^{-1}T(\varphi_h) \to 0 \quad (h \to \infty)$$

でなければならない．これは $|T(\varphi_h)| > h$ に反する．

十分なこと： $\varphi_h \Longrightarrow 0$ $((\mathfrak{D}_{R^n}))$ とすると，$m_h \to \infty$ $(h \to \infty)$ なる $\{m_h\}$ が存在して $\{m_h \varphi_h\}$ は有界である．したがって $T(m_h\varphi_h) = m_h T(\varphi_h)$ が有界数列になり $|T(\varphi_h)| \to 0$ $(h \to \infty)$ でなければならない．(終)

3·3 $(\mathfrak{D}_{R^n})'$ の有界集合・超函数の収束定理・項別微分定理

定理 3·4 $(\mathfrak{D}_{R^n})'$ の部分集合 $\{T_\alpha ; \alpha \in A\}$ が，各 $\varphi \in (\mathfrak{D}_{R^n})$ に対して $\sup_{\alpha \in A} |T_\alpha(\varphi)| < \infty$ を満足するならば，任意の有界集合 $\mathfrak{B} \subseteqq (\mathfrak{D}_{R^n})$ に対して

$$\sup_{\alpha \in A,\, \varphi \in \mathfrak{B}} |T_\alpha(\varphi)| < \infty \tag{3·4}$$

も満足される．

(証明) 任意のコンパクト集合 $K \subseteqq R^n$ に対して

$$A_{m\alpha}(K) = \{\varphi \in (\mathfrak{D}_K) \ ; \ |T_\alpha(\varphi)| \leqq m\}$$

とおけば，各 T_α の連続性から $A_{m\alpha}(K)$ は距離空間 $(\mathfrak{D}_K)$ の閉集合である．よってそれらの共通集合

$$A_m(K)=\bigcap_{\alpha\in A}A_{m,\alpha}(K)=\{\varphi\in(\mathfrak{D}_K)\ ;\ \sup_{\alpha\in A}|T_\alpha(\varphi)|\leqq m\}$$

も $(\mathfrak{D}_K)$ の閉集合である.

定理の仮定から $(\mathfrak{D}_K)=\bigcup_{m=1}^{\infty}A_m(K)$ であるが，$(\mathfrak{D}_K)$ は完備な距離空間（定理 2·1）また $A_m(K)$ は $(\mathfrak{D}_K)$ の閉集合であるから，Baire–Hausdorff の定理（附録）によってある正整数 h_0 に対して $A_{h_0}(K)$ は内点 φ_0 をもつ. すなわち，ある $\delta>0$ に対して

$$\left.\begin{array}{l}\mathrm{dis}_K(\varphi,\varphi_0)\leqq\delta \text{ ならば } \varphi\in A_{h_0}(K),\ \text{したがって}\\ \qquad\qquad\sup_{\alpha\in A}|T_\alpha(\varphi)|\leqq h_0\end{array}\right\}$$

$\psi=(\varphi_0+\psi)-\varphi_0=\varphi-\varphi_0$ とおけば，(2·1) によって

$$\mathrm{dis}_K(\psi,0)=\mathrm{dis}_K(\varphi-\varphi_0,0)=\mathrm{dis}_K(\varphi,\varphi_0)$$

であるから，$\mathrm{dis}_K(\psi,0)\leqq\delta$ ならば $\varphi\in A_{h_0}(K)$，またもちろん $\varphi_0\in A_{h_0}(K)$ であるから

$$T_\alpha(\psi)=T_\alpha(\varphi-\varphi_0)=T_\alpha(\varphi)-T_\alpha(\varphi_0)$$

によって $|T_\alpha(\psi)|\leqq|T_\alpha(\varphi)|+|T_\alpha(\varphi_0)|\leqq 2h_0$. かくして

$$\mathrm{dis}_K(\psi,0)\leqq\delta \text{ ならば } \sup_{\alpha\in A}|T_\alpha(\psi)|\leqq 2h_0 \tag{3·5}$$

が得られた. よって

定理 2·4 の証明および定理 2·5 からわかるように，整数 $m_0=m_0(A,K)\geqq 0$ と $\kappa=\kappa(A,K,m_0)>0$ とが定まって，各 $\alpha\in A$ に対して $\|f_\alpha\|_K=\left(\int_K|f_\alpha(x)|^2dx\right)^{1/2}\leqq\kappa^{1/2}$ なる $f_\alpha(x)$ を適当にとれば

$$\varphi\in(\mathfrak{D}_K) \text{ なるとき } T_\alpha(\varphi)=\int_K f_\alpha(x)\frac{\partial^{m_0+1}\varphi(x)}{\partial x^{m_0+1}}dx \tag{3·6}$$

$f_\alpha(x)$ は α に（T_α に）関係するかも知れないが，m_0 や κ は A に属するすべての α に（T_α に）共通にとれるところがたいせつなのである.

(3·6) から (3·4) を得ることは，Schwarz の不等式

$$|T_\alpha(\varphi)|\leqq\left(\int_K|f_\alpha(x)|^2dx\cdot\int_K\left|\frac{\partial^{m_0+1}\varphi(x)}{\partial x^{m_0+1}}\right|^2dx\right)^{1/2}$$

$$\leqq \kappa^{1/2}\cdot\left(\int_K \left|\frac{\partial^{m_0+1}\varphi(x)}{\partial x^{m_0+1}}\right|^2 dx\right)^{1/2}$$

によってわかる．$(\mathfrak{D}_{R^n})$の有界集合 $\mathfrak{B}$ に対してはコンパクト集合 $K\subseteqq R^n$ が存在して，$\varphi\in\mathfrak{B}$ ならば $\varphi\in(\mathfrak{D}_K)$ であり，かつ

$$\sup_{\varphi\in\mathfrak{B},\, x\in K} |\partial^{m_0+1}\varphi(x)/\partial x^{m_0+1}| < \infty$$

であるからである．(終)

$(\mathfrak{D}_{R^n})'$ **の有界集合の定義** $((\mathfrak{D}_{R^n}))$ の任意の有界集合 $\mathfrak{B}$ の上で有界すなわち (3·4) の成り立つような $\{T_\alpha\in(\mathfrak{D}_{R^n})'; \alpha\in A\}$ を $(\mathfrak{D}_{R^n})'$ の**有界集合**という．そうすれば上定理は次のごとくいいかえられる．

定理 3·4′ $\{T_\alpha\in(\mathfrak{D}_{R^n})'; \alpha\in A\}$ が有界集合であるための必要かつ十分な条件は，各 $\varphi\in(\mathfrak{D}_{R^n})$ に対して $\{T_\alpha(\varphi)\}_{\alpha\in A}$ が有界なことである．

定理 3·5 超函数の列 $\{T_h\}$ が，各 $\varphi\in(\mathfrak{D}_{R^n})$ において有限な極限

$$\lim_{h\to\infty} T_h(\varphi) = T(\varphi)$$

をもつならば T はまた超函数である．[**収束定理**]

(証明) T が $(\mathfrak{D}_{R^n})$ において加法的な汎函数であることは明らか．また定理 3·4 によって，任意の有界集合 $\mathfrak{B}\subseteqq(\mathfrak{D}_{R^n})$ の上で T は有界である．よって定理 3·3 によって T は連続である．(終)

系 すべての $\varphi\in(\mathfrak{D}_{R^n})$ に対して $\lim\limits_{h\to\infty} T_h(\varphi)=T(\varphi)$ が成り立つならば，任意の $D^{(p)}$ および任意の $\varphi\in(\mathfrak{D}_{R^n})$ に対して

$$\lim_{h\to\infty} (D^{(p)}T_h)(\varphi) = (D^{(p)}T)(\varphi)$$

が成り立つ．[**項別微分定理**]

(証明) $(D^{(p)}T_h)(\varphi)=(-1)^{|p|}T_h(D^{(p)}\varphi)$, $(D^{(p)}T)(\varphi)=(-1)^{p}T(D^{(p)}\varphi)$ であるから明らかである．(終)

収束定理および項別微分定理の応用例 R^1 で考える．

$$f_h(x)=\int_1^h -(2\pi w)^{-2}\cos 2\pi wx\cdot dw$$

は h, x を動かすとき有界でかつ有限な極限

$$f(x)=\lim_{h\to\infty}\int_1^h -(2\pi w)^{-2}\cos 2\pi wx\cdot dw$$

が存在するから

$$\lim_{h\to\infty} T_{f_h}(\varphi)=T_f(\varphi),\qquad \varphi\in(\mathfrak{D}_{R^1})$$

故に $D^{(2)}=d^2/dx^2$ に対して，項別微分定理で

$$D^{(2)}T_f(\varphi)=\lim_{h\to\infty}(D^{(2)}T_{f_h})(\varphi),\qquad \varphi\in(\mathfrak{D}_{R^1})$$

ところが (1·13) によって

$$D^{(2)}T_{f_h}=T_{D^{(2)}f_h}$$

であり，また

$$(D^{(2)}f_h)(x)=\int_1^h\cos 2\pi wx\cdot dw$$

$$=(2\pi x)^{-1}\sin 2\pi hx-\int_0^1\cos 2\pi wx\cdot dw$$

であるから

$$g_h(x)=(\pi x)^{-1}\sin 2\pi hx=2\int_0^h\cos 2\pi wx\cdot dw$$

$$=2(D^{(2)}f_h)(x)+2\int_0^1\cos 2\pi wx\cdot dw$$

に対して

$$\lim_{h\to\infty} T_{g_h}(\varphi)=(2D^{(2)}T_f)(\varphi)$$

$$+2\int_{-\infty}^{\infty}\left\{\int_0^1\cos 2\pi wx\cdot dw\right\}\varphi(x)dx$$

を得る．一方よく知られた公式 (Dirichlet の定理) によって

$$T_{g_h}(\varphi)=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin 2\pi hx}{\pi x}\varphi(x)dx\to\varphi(0)\quad(h\to\infty)$$

であるから，

$$\lim_{h\to\infty} g_h(x)=\lim_{h\to\infty}2\int_0^h\cos 2\pi wx\cdot dx$$

は存在しないにもかかわらず

$$\lim_{h\to\infty} T_{g_h}(\varphi) \text{ は存在して} = T_\delta(\varphi)$$

である．かくして物理学者や電気学者によってしばしば用いられる便宜的な公式

$$2\int_0^\infty \cos 2\pi wx\cdot dw = \delta(x) \tag{3·7}$$

が超函数論的に正当化されたわけである．

3.4 $(\mathfrak{D}_{R^n})$ および $(\mathfrak{D}_{R^n})'$ の位相の双対性

まず，定理 3·4 に双対的に

定理 3·6 $(\mathfrak{D}_{R^n})$ の部分集合 $\{\varphi_\alpha\in\mathfrak{D}_{R^n})$；$\alpha\in A\}$ がすべての $T\in(\mathfrak{D}_{R^n})'$ に対して $\sup|T(\varphi_\alpha)|<\infty$ を満足するならば，$\{\varphi_\alpha;\ \alpha\in A\}$ は $(\mathfrak{D}_{R^n})$ の有界集合である．故に定理 3·3 と組合せて，定理 3·4′ と双対的に

定理 3·6′ $\{\varphi_\alpha\in(\mathfrak{D}_{R^n});\alpha\in A\}$ が有界集合であるための必要かつ十分な条件は各 $T\in(\mathfrak{D}_{R^n})'$ に対して $\{T(\varphi_\alpha)\}_{\alpha\in A}$ が有界なことである．

（定理 3·6 の証明） まず，すべての $\alpha\in A$ に対して $\mathrm{car.}(\varphi_\alpha)\subseteqq K$ となるようなコンパクト集合 $K\subseteqq R^n$ の存在することをいう．もしもこのような K が存在しないとすると，R^n の点列 $\{x^{(h)}\}$ と $\{\varphi_\alpha;\ \alpha\in A\}$ の部分列 $\{\varphi_{\alpha_h}\}$ とを適当に選んで

$$\left.\begin{array}{l} |x^{(h)}|+1<|x^{(h+1)}| \quad (h=1,2,\cdots) \\ \varphi_{\alpha_h}(x^{(h)})\neq 0,\ \ \varphi_{\alpha_h}(x^{(h+i)})=0 \quad (h,i=1,2,\cdots) \end{array}\right\} \tag{3·8}$$

となるようにできる．ここにおいて複素数列 $\{m_h\}$ を

$$m_1\varphi_{\alpha_1}(x^{(1)})\geqq 1,$$
$$m_1\varphi_{\alpha_2}(x^{(1)})+m_2\varphi_{\alpha_2}(x^{(2)})\geqq 2$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\sum_{j=1}^{k} m_j\varphi_{\alpha_k}(x^{(j)})\geqq k$$

が成り立つようにとる．

$$T(\varphi)=\sum_{j=1}^{\infty} m_j\varphi(x^{(j)}),\qquad \varphi\in(\mathfrak{D}_{R^n})$$

によって超函数 T が定義されることは，car. (φ) がコンパクトであるために，$T(\varphi)=\sum_{x^{(j)}\in \mathrm{car.}(\varphi)} m_j\varphi(x^{(j)})$ と有限和になることからわかる．この T に対して $T(\varphi_{\alpha_k})\geqq k$ であるから $\{T(\varphi_\alpha)\}_{\alpha\in A}$ が有界という仮定に反する．故に $\{\varphi_\alpha;\ \alpha\in A\}\subseteqq(\mathfrak{D}_K)$ なるコンパクト集合 $K\subseteqq R^n$ が存在する．

次に各 $D^{(p)}$ に対して $\sup_{\alpha\in A, x\in K}|D^{(p)}\varphi_\alpha(x)|<\infty$ なることをいおう．そのために

$$\left.\begin{aligned} &f(x)=0,\quad x\notin K \text{ なるとき}\\ &\|f\|_K=\left(\int_K |f(x)|^2dx\right)^{1/2}<\infty \end{aligned}\right\} \tag{3·9}$$

なる複素数値函数 $f(x)$ によって定義せられた $T_f\in(\mathfrak{D}_{R^n})'$ を考える．定理の仮定によって

$$\sup_{\alpha\in A}|D^{(p)}T_f(\varphi_\alpha)|=\sup_{\alpha\in A}\left|\int_K f(x)D^{(p)}\varphi_\alpha(x)\,dx\right|=c(f,A)<\infty$$

である．いま (3·9) を満足する $f(x)$ の全体を $L_2(K)$ とし

$$p_\alpha(f)=\left|\int_K f(x)D^{(p)}\varphi_\alpha(x)\,dx\right|$$

とおく．Schwarz 不等式で

$$p_\alpha(f)\leqq\|f\|_K\cdot\|D^{(p)}\varphi_\alpha\|_K$$

となるから

$$p_\alpha(f+g)\leqq p_\alpha(f)+p_\alpha(g),\qquad p_\alpha(\beta f)=|\beta|p_\alpha(f) \tag{3·10}$$

によって，$p_\alpha(f)$ は完備な距離空間である Hilbert 空間 $L_2(K)$ の上で連続なことがわかる．

$$|p_\alpha(f+g)-p_\alpha(g)|\leqq p_\alpha(f)\leqq\|f\|_K\|D^{(p)}\varphi_\alpha\|_K$$

の右辺は $\|f\|_K\to 0$ なるとき 0 に収束するからである．よって

$$A_{m\alpha}=\{f\in L_2(K)\,;\,p_\alpha(f)\leqq m\}$$

したがって

$$A_m=\bigcap_{\alpha\in A}^{\infty}A_{m\alpha}=\{f\in L_2(K);\ \sup_{\alpha\in A}p_\alpha(f)\leqq m\}$$

は $L_2(K)$ の閉集合であり，$\sup_{\alpha\in A}p_\alpha(f)\leqq c(f,A)<\infty$ から

$$L_2(K)=\bigcup_{m=1}^{\infty}A_m$$

$L_2(K)$ か完備であるから，Baire–Hausdorff の定理（附録）によって，ある A_{m_0} は内点 f_0 を含む．すなわち $\delta>0$ が存在して

$$\|f-f_0\|\leqq\delta \text{ ならば } f\in A_{m_0}$$

$f=(f+f_0)-f_0$ において $\|f\|\leqq\delta$ ならば $\|f+f_0-f_0\|\leqq\delta$ であるから， $f+f_0\in A_{m_0}$，また明らかに $f_0\in A_{m_0}$ であるから，(3·10) によって $\|f\|\leqq\delta$ ならば

$$\sup_{\alpha\in A}p_\alpha(f)\leqq\sup_{\alpha\in A}p_\alpha(f+f_0)+\sup_{\alpha\in A}p_\alpha(f_0)\leqq 2m_0$$

故にすべての $\alpha\in A$ に対して

$$\|f\|_K\leqq\delta \text{ ならば } \left|\int_K f(x)D^{(p)}\varphi_\alpha(x)\,dx\right|\leqq 2m_0$$

したがってすべての $\alpha\in A$ に対して

$$f\in L_2(K) \text{ ならば } \left|\int_K f(x)D^{(p)}\varphi_\alpha(x)\,dx\right|\leqq\delta^{-1}\cdot 2m_0\|f\|_K$$

を得る．故にとくに $f=D^{(p)}\varphi_\alpha$ として

$$\|D^{(p)}\varphi_\alpha\|^2{}_K\leqq\delta^{-1}\cdot 2m_0\|D^{(p)}\varphi_\alpha\|_K$$

すなわち，すべての $D^{(p)}$ とすべての $\alpha\in A$ に対して

$$\|D^{(p)}\varphi_\alpha\|_K\leqq\delta^{-1}\cdot 2m_0$$

故に定理 2·4 の証明第二段におけると同様にして，すべての $D^{(p)}$ に対して

$$\sup_{\alpha\in A,\,x\in K}|D^{(p)}\varphi_\alpha(x)|<\infty$$

なることがわかった．(終)

上の定理を用いて収束定理 3·5 に双対な次の定理を得る．

定理 3·7 $(\mathfrak{D}_{R^n})$ の函数列 $\{\varphi_h\}$ が $(\mathfrak{D}_{R^n})$ のある函数 $\varphi_\infty(x)$ に $\Longrightarrow$ の意味で収束する，すなわち

$$(\varphi_\infty-\varphi_h)\Longrightarrow 0\ ((\mathfrak{D}_{R^n}))$$

なるための必要かつ十分な条件は，すべての $T\in(\mathfrak{D}_{R^n})'$ に対して有限な極限 $\lim_{h\to\infty}T(\varphi_h)$ が存在することである．**[収束定理]**

(証明) 必要なこと： $T(\varphi_\infty)-T(\varphi_h)=T(\varphi_\infty-\varphi_h)\to 0$ $(h\to\infty)$ から

明らか.

十分なこと： まず前定理から $\{\varphi_h\}$ は有界集合である. よって上のごとき φ_∞ が存在しないとすると, 定理 3·1 を用い, $\{\varphi_h\}$ の部分列 $\{\varphi_{h'}\}$ と $\{\varphi_{h''}\}$ とが存在して $\varphi_\infty{}^{(1)}(x) \neq \varphi_\infty{}^{(2)}(x)$ に対して

$$(\varphi_\infty{}^{(1)}-\varphi_{h'}) \Longrightarrow 0 \ ((\mathfrak{D}_{R^n})), \quad (\varphi_\infty{}^{(2)}-\varphi_{h''}) \Longrightarrow 0 \ ((\mathfrak{D}_{R^n}))$$

となるようにできる. $\varphi_\infty{}^{(1)}(x^{(0)}) \neq \varphi_\infty{}^{(2)}(x^{(0)})$ とすると超函数 $T(\varphi)=\varphi(x^{(0)})$ に対して, $h \to \infty$ なるとき

$$T(\varphi_\infty{}^{(1)}-\varphi_{h'})=T(\varphi_\infty{}^{(1)})-T(\varphi_{h'})=\varphi_\infty{}^{(1)}(x^{(0)})-T(\varphi_{h'}) \to 0$$

$$T(\varphi_\infty{}^{(2)}-\varphi_{h''})=T(\varphi_\infty{}^{(2)})-T(\varphi_{h''})=\varphi_\infty{}^{(2)}(x^{(0)})-T(\varphi_{h''}) \to 0$$

から $\lim_{h'\to\infty} T(\varphi_{h'}) \neq \lim_{h''\to\infty} T(\varphi_{h''})$ を得て有限な極限 $\lim_{h\to\infty} T(\varphi_h)$ が存在するという仮定に反する.

以上から $(\mathfrak{D}_{R^n})$ と $(\mathfrak{D}_{R^n})'$ の位相の双対性がわかる. すなわち, まず

$(\mathfrak{D}_{R^n})$ において： $\varphi_h \Longrightarrow \varphi \ ((\mathfrak{D}_{R^n}))$ を $\varphi-\varphi_h \Longrightarrow 0 \ ((\mathfrak{D}_{R^n}))$ なるごとき $\varphi \in ((\mathfrak{D}_{R^n}))$ の存在することによって定義する. また $(\mathfrak{D}_{R^n})'$ において： $T_h \Longrightarrow T((\mathfrak{D}_{R^n})')$ を, すべての $\varphi \in (\mathfrak{D}_{R^n})$ において $T_h(\varphi) \to T(\varphi)$ なるごとき $T \in (\mathfrak{D}_{R^n})'$ の存在することによって定義する. そしてこれらの場合にそれぞれ $\{\varphi_h\}$ は（$\Longrightarrow$ の意味で）収束する, $\{T_h\}$ は（$\Longrightarrow$ の意味で）収束するということにすれば, 定理 3·5 と定理 3·7 とをまとめて

収束定理 $\{\varphi_h\} \subseteqq (\mathfrak{D}_{R^n})$ が収束するための必要かつ十分な条件は, すべての $T \in (\mathfrak{D}_{R^n})'$ に対して $\{T(\varphi_h)\}$ が収束することである. また $\{T_h\} \subseteqq (\mathfrak{D}_{R^n})'$ が収束するための必要かつ十分な条件は, すべての $\varphi \in (\mathfrak{D}_{R^n})$ に対して $\{T_h(\varphi)\}$ が収束することである.

が得られる.

3.5 $(\mathfrak{D}_{R^n})$ および $(\mathfrak{D}_{R^n})'$ の反射性の証明

任意の $\varphi \in (\mathfrak{D}_{R^n})$ に対して

$$T(\varphi)=F_\varphi(T) \tag{3·11}$$

とおけば, F_φ は $(\mathfrak{D}_{R^n})'$ の上で定義せられた加法的：

$$F_\varphi(\alpha_1 T_1+\alpha_2 T_2)=\alpha_1 F_\varphi(T_1)+\alpha_2 F_\varphi(T_2) \tag{3·12}$$

かつ連続な：

$$\lim_{T_h \Rightarrow 0(\mathfrak{D}_{R^n})'} F_\varphi(T_h)=F_\varphi(0)=0 \tag{3·13}$$

汎函数となる. (3·12) は $F_\varphi(\alpha_1 T_1+\alpha_2 T_2)=(\alpha_1 T_1+\alpha_2 T_2)(\varphi)=\alpha_1 T_1(\varphi)+\alpha_2 T_2(\varphi)=\alpha_1 F_\varphi(T_1)+\alpha_2 F_\varphi(T_2)$ から, また (3·13) は (3·11) と収束定理からわかるのである.

一般に $(\mathfrak{D}_{R^n})'$ の上で定義せられた加法的連続汎函数の全体を $(\mathfrak{D}_{R^n})''$ と書くことにすれば,

定理 3·8 任意の $F\in(\mathfrak{D}_{R^n})''$ に対して $f\in(\mathfrak{D}_{R^n})$ を定めてすべての $T\in(\mathfrak{D}_{R^n})'$ に対して

$$F(T)=F_f(T)=T(f) \tag{3·14}$$

が成り立つようにできる.

(証明) 第一段： 任意の $\psi\in(\mathfrak{E}_{R^n})$ に対して

$$T_\psi(\varphi)=\int_{R^n}\psi(x)\varphi(x)dx, \quad \varphi\in(\mathfrak{D}_{R^n}) \tag{3·15}$$

をつくる.

$$\left.\begin{array}{l}\psi_h \Longrightarrow 0\ ((\mathfrak{E}_{R^n}))\ \text{ならば}\ T_{\psi_h}(\varphi)\to 0\ \text{したがって}\\ \qquad\qquad T_{\psi_h}\Longrightarrow 0\ ((\mathfrak{D}_{R^n})')\end{array}\right\} \tag{3·16}$$

であるから, F の連続性によって

$$F(T_{\psi_h})\to 0 \quad (h\to\infty)$$

すなわち

$$L^{(0)}(\psi)=F(T_\psi) \tag{3·17}$$

は $\in(\mathfrak{E}_{R^n})'$, すなわちコンパクトな台をもつ超函数となる. car.$(L^{(0)})=K^{(0)}$ とすれば, $K^{(0)}$ で 1 となりかつつねに $|\alpha^{(0)}(x)|\leqq 1$ であるような任意の $\alpha^{(0)}(x)\in(\mathfrak{D}_{R^n})$ に対して

$$L^{(0)}(\psi)=L^{(0)}(\alpha^{(0)}\psi) \tag{3·18}$$

しかも car.$(\alpha^{(0)})=K_0{}^{(0)}$ とおけば, Schwarz の不等式で

$$|T_{\alpha^{(0)}\psi}(\varphi)| \leqq \left(\int_{K_0^{(0)}} |\psi(x)|^2 dx \cdot \int_{K_0^{(0)}} |\varphi(x)|^2 dx\right)^{1/2}$$

となるから

$$\|\psi_h\|_{K_0^{(0)}} = \left(\int_{K_0^{(0)}} |\psi_h(x)|^2 dx\right)^{1/2} \to 0 \text{ ならば } T_{\alpha^{(0)}\psi_h} \Longrightarrow 0$$

$$((\mathfrak{D}_{R^n})') \text{ となって } L^{(0)}(\alpha^{(0)}\psi_h) \to 0$$

故に，F. Riesz の定理（附録）が使えて

$$\left.\begin{aligned} &L^{(0)}(\psi) = \int_{K_0^{(0)}} f^{(0)}(x)\psi(x)dx, \\ &\text{car.}(f^{(0)}) \subseqq K_0^{(0)}, \ \|f^{(0)}\|^2 = \int_{R^n} |f^{(0)}(x)|^2 dx < \infty \end{aligned}\right\} \quad (3\cdot19)$$

なるごとき $f^{(0)}(x)$ が存在する．

また項別微分定理によって，(3·16) を用い

$$\psi_h \Longrightarrow 0 \ ((\mathfrak{E}_{R^n})) \text{ ならば } D^{(p)}T_{\psi_h} \Longrightarrow 0 \ ((\mathfrak{D}_{R^n})')$$

であるから

$$L^{(p)}(\psi) = F(D^{(p)}T_\psi)$$

は $\epsilon(\mathfrak{E}_{R^n})'$ である． car.$(L^{(p)}) = K^{(p)}$ とすると，$K^{(p)}$ で 1 となりかつつねに $|\alpha^p(x)| \leqq 1$ であるような任意の $\alpha^{(p)}(x) \epsilon (\mathfrak{D}_{R^n})$ に対して

$$L^{(p)}(\psi) = L^{(p)}(\alpha^{(p)}\psi)$$

しかして

$$(D^{(p)}T_{\alpha^{(p)}\psi})(\varphi) = (-1)^{|p|} T_{\alpha^{(p)}\psi}(D^{(p)}\varphi)$$

であるから，car.$(\alpha^{(p)}) = K_p^{(p)}$ とすれば

$$|D^{(p)}T_{\alpha^{(p)}\psi}(\varphi)| \leqq \left(\int_{K_p^{(p)}} |\psi(x)|^2 dx \cdot \int_{K_p^{(p)}} |D^{(p)}\varphi(x)|^2 dx\right)^{1/2}$$

となって $\|\psi\|_{K_p^{(p)}} \to 0$ ならば $D^{(p)}T_{\alpha^{(p)}\psi_h} \Longrightarrow 0$ $((\mathfrak{D}_{R^n})')$ となって $L^{(p)}(\alpha^{(p)}\psi_h) = F(D^{(p)}T_{\alpha^{(p)}\psi_h}) \to 0$. 故に F. Riesz の定理（附録）が使えて

$$\left.\begin{aligned} &L^{(p)}(\psi) = \int_{K_p^{(p)}} f^{(p)}(x)\psi(x)dx \\ &\text{car.}(f^{(p)}) \subseqq K_p^{(p)}, \ \|f^{(p)}\|^2 = \int_{R^n} |f^{(p)}(x)|^2 dx < \infty \end{aligned}\right\} \quad (3\cdot20)$$

なるごとき $f^{(p)}(x)$ が存在する.

また (1·13) を用い

$$D^{(p)}T_{\psi}=T_{D^{(p)}\psi} \tag{3·21}$$

が得られるから

$$L^{(p)}(\psi)=F(D^{(p)}T_{\psi})=F(T_{D^{(p)}\psi})=L^{(0)}(D^{(p)}\psi) \tag{3·22}$$

であり，したがって (3·19) で

$$L^{(p)}(\psi)=\int_{K_0^{(0)}}f^{(0)}(x)D^{(p)}\psi(x)dx$$

よって (3·20) と結びつけて

$$\int_{R^n}f^{(p)}(x)\psi(x)dx=\int_{R^n}f^{(0)}(x)D^{(p)}\psi(x)dx,$$

すなわち

$$T_{f^{(p)}}=(-1)^{|p|}D^{(p)}T_{f^{(0)}} \tag{3·23}$$

が得られた.

第二段： $f^{(0)}(x)$ が $(\mathfrak{D}_{R^n})$ に属するある函数 $f(x)$ と殆んどすべての x において等しいことをいう. まず $\|f^{(0)}\|<\infty$, $\|f^{(p)}\|<\infty$ であるから, $f^{(0)}(x)$, $f^{(p)}(x)$ ともに R^n において局所的に可積分なことが Schwarz の不等式によってわかる. コンパクト集合 K に対し

$$\int_K|f^{(p)}(x)|dx\leqq\left(\int_K dx\cdot\int_K|f^{(p)}(x)|^2dx\right)^{1/2}\leqq\left(\int_K dx\right)^{1/2}\cdot\|f^{(p)}\|<\infty$$

となるからである. ところが, あとで §7·2 に示すように局所的に可積分な $f^{(0)}(x)$, $g^{(p)}(x)$ に対して

$$\varDelta^p T_{f^{(0)}}=T_{g^{(p)}},\ \text{ただし}\ \varDelta=\sum_{i=1}^{n}\partial^2/\partial x_i^2\ (p=0,1,2,\cdots) \tag{3·24}$$

が成り立つならば，無限回偏微分可能な函数 $f(x)$ が存在して

$$\text{殆んどすべての}\ x\ \text{に対して}\ f^{(0)}(x)=f(x) \tag{3·25}$$

が成り立つ. 故に car.$(f^{(0)})$ がコンパクトなことから $f\in(\mathfrak{D}_{R^n})$ である.

第三段： 以上から $f\in(\mathfrak{D}_{R^n})$ が存在して

$$F(T_{\psi})=F_f(T_{\psi})=\int_{R^n}f(x)\psi(x)dx,\quad \psi\in(\mathfrak{E}_{R^n}) \tag{3·26}$$

ところが，あとで §5·2 に示すように，任意の $T\epsilon(\mathfrak{D}_{R^n})'$ に対して $\{\psi_h\}\subseteqq(\mathfrak{E}_{R^n})$ を

$$T_{\psi_h} \Longrightarrow T((\mathfrak{D}_{R^n})')$$

なるごとくに定め得る．よって F の連続性によって，(3·26) を用い

$$F(T)=\lim_{h\to\infty} F(T_{\psi_h})=\lim_{h\to\infty}\int_{\text{car.}(f)} f(x)\psi_h(x)dx$$

$$=\lim_{h\to\infty} T_{\psi_h}(f)=T(f) \qquad \text{(終)}$$

$(\mathfrak{D}_{R^n})$ および $(\mathfrak{D}_{R^n})'$ の反射性（**reflexivity**） $(\mathfrak{D}_{R^n})''$ の汎函数列 $\{F_h\}$ の収束：

$$F_h \Longrightarrow 0\ ((\mathfrak{D}_{R^n})'')$$

を，すべての $T\epsilon(\mathfrak{D}_{R^n})'$ において $F_h(T)\to 0$ であることによって定義する．そうすれば収束定理と前定理とによって，$F_h\Longrightarrow 0\ ((\mathfrak{D}_{R^n})'')$ は

$$F_h(T)=T(f_h), \qquad f_h\epsilon(\mathfrak{D}_{R^n})$$

なる f_h の $\Longrightarrow 0\ (\mathfrak{D}_{R^n})$ なることと一致することがわかる．故に $(\mathfrak{D}_{R^n})$ と $(\mathfrak{D}_{R^n})''$ とが抽象集合としても収束の概念の入ったベクトル空間としても同一のものであることがわかった．対応

$$(\mathfrak{D}_{R^n})''\ni F\leftrightarrow f\epsilon(\mathfrak{D}_{R^n}),\ \text{ただし}\ F(T)=T(f)$$

が1対1，かつ $F_i\leftrightarrow f_i$ ならば

$$\alpha_1F_1+\alpha_2F_2\leftrightarrow\alpha_1f_1+\alpha_2f_2$$

であることが

$$(\alpha_1F_1+\alpha_2F_2)(T)=\alpha_1F_1(T)+\alpha_2F_2(T)=\alpha_1T(f_1)+\alpha_2T(f_2)$$

$$=T(\alpha_1f_1+\alpha_2f_2)$$

からわかるからである．

したがってまた $((\mathfrak{D}_{R^n})')''=((\mathfrak{D}_{R^n})'')'=(\mathfrak{D}_{R^n})'$ となって $(\mathfrak{D}_{R^n})'$ と $(\mathfrak{D}_{R^n})'''$ とを一致させて考えられることもわかる．

これらをまとめて $(\mathfrak{D}_{R^n})$ も $(\mathfrak{D}_{R^n})'$ もともに反射的 (reflexive, regular) な位相ベクトル空間であるという．

同様にして $(\mathfrak{E}_{R^n})$, $(\mathfrak{E}_{R^n})'$ が反射的なことも証明される．すなわち

定理 3·9 $(\mathfrak{D}_{R^n})$, $(\mathfrak{D}_{R^n})'$, $(\mathfrak{E}_{R^n})$, $(\mathfrak{E}_{R^n})'$ はいずれも反射的な位相ベクトル空間である．

第 4 章　直積および積

4.1　一つの近似定理

$x=(x_1, x_2, \cdots, x_n)$, $y=(y_1, y_2, \cdots, y_m)$ とし R^{n+m} の点を一般に $z=(x, y)$ $=(x_1, \cdots x_n, y_1, \cdots, y_m)$ で表わす.

定理 4·1　$(\mathfrak{D}_{R^{n+m}})$ の任意の函数 $\varphi(z)=\varphi(x,y)$ に対して

$$\left.\begin{aligned}&\varphi_i(z)=\varphi_i(x,y)=\sum_{j=1}^{n_i} c_{ij}u_{ij}(x)v_{ij}(y),\\ &\text{ただし}\quad u_{ij}(x)\in(\mathfrak{D}_{R^n}),\ v_{ij}(y)\in(\mathfrak{D}_{R^m})\end{aligned}\right\}\qquad(4\cdot1)$$

を $\varphi_i \Longrightarrow \varphi((\mathfrak{D}_{R^{n+m}}))$ なるように選ぶことができる.

（証明）　同じことであるから, $n=m=1$ として証明する. $\varphi(x,y)\in(\mathfrak{D}_{R^2})$ に対して

$$\left.\begin{aligned}\Phi(x,y,t)&=\left(\frac{1}{2\sqrt{\pi t}}\right)^2\int_{-\infty}^{\infty}\!\!\int\varphi(\xi,\eta)e^{-\frac{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}{4t}}d\xi d\eta, & t>0\\ &=\varphi(x,y), & t=0\end{aligned}\right\}\quad(4\cdot2)$$

を考える. 変数変換 $\xi_1=(\xi-x)/2\sqrt{t}$, $\eta_1=(\eta-y)/2\sqrt{t}$ で

$$\Phi(x,y,t)=\left(\frac{1}{\sqrt{\pi}}\right)^2\int_{-\infty}^{\infty}\!\!\int\varphi\left(x+2\xi_1\sqrt{t},\ y+2\eta_1\sqrt{t}\right)e^{-\xi_1^2-\eta_1^2}d\xi_1 d\eta_1$$

故に $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\!\!\int e^{-\xi_1^2-\eta_1^2}d\xi_1 d\eta_1=\pi$ によって

$$\begin{aligned}&|\Phi(x,y,t)-\varphi(x,y)|\\ &\leqq\left(\frac{1}{\sqrt{\pi}}\right)^2\int_{-\infty}^{\infty}\!\!\int|\varphi(x+2\xi\sqrt{t},\ y+2\eta\sqrt{t})-\varphi(x,y)|e^{-\xi^2-\eta^2}d\xi d\eta\\ &=\frac{1}{\pi}\left\{\iint_{\xi^2+\eta^2\geqq T^2}\qquad+\iint_{\xi^2+\eta^2<T^2}\qquad\right\}\end{aligned}$$

φ が有界で $e^{-\xi^2-\eta^2}$ が可積分であるから, 右辺第一項は $T\to\infty$ なるとき $\to 0$. また T を固定したとき, 右辺第二項は $t\downarrow 0$ なるとき (x,y) に関して一様に $\to 0$. φ が一様連続であるからである.

次に car.(φ) がコンパクトであるから，部分積分で容易にわかるように

$$\frac{\partial^{m_1+n_2}\Phi(x,y,t)}{\partial x^{m_1}\partial y^{n_2}}=\left(\frac{1}{2\sqrt{\pi t}}\right)^2\int_{-\infty}^{\infty}\int\frac{\partial^{m_1+n_2}\varphi(\xi,\eta)}{\partial\xi^{m_1}\partial\eta^{n_2}}e^{-\frac{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}{4t}}d\xi d\eta,$$
$(t>0$ なるとき$)$

$$=\frac{\partial^{m_1+n_2}\varphi(x,y)}{\partial x^{m_1}\partial y^{n_2}},\quad (t=0 \text{ なるとき})$$

を得る．

$$\frac{\partial^{m_1+n_2}e^{-\{(x-\xi)^2+(y-\eta^2)\}/4t}}{\partial x^{m_1}\partial y^{n_2}}=(-1)^{m_1+n_2}\frac{\partial^{m_1+n_2}e^{-\{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2\}/4t}}{\partial\xi^{m_1}\partial\eta^{n_2}}$$

であるからである．故に上と同様にして $t\downarrow 0$ なるとき (x,y) に関し一様に

$$\frac{\partial^{m_1+n_2}\Phi(x,y,t)}{\partial x^{m_1}\partial y^{n_2}}\to\frac{\partial^{m_1+n_2}\varphi(x,y)}{\partial x^{m_1}\partial y^{n_2}}$$

なることがわかった．

$\Phi(x,y,t)$ の x,y を複素数としても (4·2) が意味をもちかつこれが複素数 x,y の函数としても偏微分可能なことは φ が有界なことからわかる．よって $\Phi(x,y,t)$ は $|x|<\infty$, $|y|<\infty$ において複素数 x,y の正則函数となる．故に任意の $\gamma>0$ に対して $|x|\leqq\gamma$, $|y|\leqq\gamma$ で絶対かつ一様収束する Taylor 展開

$$\Phi(x,y,t)=\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{m}C_{m,k}(t)x^ky^{m-k}$$

$$\frac{\partial^{m_1+n_2}\Phi(x,y,t)}{\partial x^{m_1}\partial y^{n_2}}=\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{m}C_{m,k}(t)\frac{\partial^{m_1+n_2}x^ky^{m-k}}{\partial x^{m_1}\partial y^{n_2}}$$

が可能である．

故に $t_i\downarrow 0$ なる正数列 $\{t_i\}$ に対して $\Phi(x,y,t_i)$ の Taylor 展開の十分さきの項までとった多項式を $P_i(x,y)$ としたとき

$$P_i(x,y)\Longrightarrow\varphi(x,y)\quad((\mathfrak{E}_{R^n}))$$

の成り立つことがわかった．ここにおいて $\rho(x)\in(\mathfrak{D}_{R^n})$, $\sigma(y)\in(\mathfrak{D}_{R^m})$ を，car.$(\varphi(x,y))$ の上で $\rho(x)\sigma(y)\equiv 1$ なるごとく選べば

$$\varphi_i(x,y)=\rho(x)\sigma(y)P_i(x,y)$$

が求めるものである．

4·2 超函数の直積

直積 $(\mathfrak{D}_{R^n})\times(\mathfrak{D}_{R^m})$ の定義 上の $\varphi_i(x,y)$ のように

$$\sum_{i=1}^{k} c_i\varphi_i(x)\psi_i(y);\quad \varphi_i\in(\mathfrak{D}_{R^n}),\quad \psi_i\in(\mathfrak{D}_{R^m})$$

の形に与えられる函数の全体を $(\mathfrak{D}_{R^n})\times(\mathfrak{D}_{R^m})$ と書いて $(\mathfrak{D}_{R^n})$ と $(\mathfrak{D}_{R^m})$ との**直積** (direct product) とよぶ．上の定理は $(\mathfrak{D}_{R^n})\times(\mathfrak{D}_{R^m})$ が $(\mathfrak{D}_{R^{n+m}})$ において，$\Longrightarrow$ $((\mathfrak{D}_{R^{n+m}}))$ の意味で稠密なことを示す．

直積 $(\mathfrak{D}_{R^n})'\times(\mathfrak{D}_{R^m})'$ の定義 $\varphi(x)\in(\mathfrak{D}_{R^n})$ や $\psi(y)\in(\mathfrak{D}_{R^m})$ の独立変数 $x=(x_1,\cdots,x_n)$，$y=(y_1,\cdots,y_m)$ を明示するために，

$$(\mathfrak{D}_{R^n})=(\mathfrak{D}_x),\quad (\mathfrak{D}_{R^m})=(\mathfrak{D}_y)$$

等と記し

$$\varphi\in(\mathfrak{D}_x),\quad \psi\in(\mathfrak{D}_y)$$

等と書く．たま T が $(\mathfrak{D}_x)$ の上の超函数であることを示すために $T_{(x)}$ または $T=T_{(x)}\in(\mathfrak{D}_x)'$ 等と記す．$S_{(y)}$ または $S=S_{(y)}\in(\mathfrak{D}_y)'$ についても同様に諒解せられたい．このようにすれば上の $(\mathfrak{D}_{R^{n+m}})$ を $(\mathfrak{D}_{x\times y})$ と書いてもよいことも理解し易いであろう．$T_{(x)}$ と $S_{(y)}$ との直積 $T_{(x)}\times S_{(y)}$ の定義を次の定理によって導入する．

定理 4·2 $T_{(x)}\in(\mathfrak{D}_x)'$ と $S_{(y)}\in(\mathfrak{D}_y)'$ とが与えられたとき，$(\mathfrak{D}_{x\times y})'$ に属する $W=W_{(x,y)}$ を

$$\left.\begin{aligned} &W(u(x)v(y))=T_{(x)}(u(x))S_{(y)}(v(y)),\\ &\text{ただし}\quad u\in(\mathfrak{D}_x),\ v\in(\mathfrak{D}_y)\end{aligned}\right\}\tag{4·3}$$

を満足しかつ，Fubini の定理

$$W(\varphi(x,y))=S_{(y)}T_{(x)}(\varphi(x,y))=T_{(x)}S_{(y)}(\varphi(x,y))\tag{4·4}$$

が成り立つように一意的に定めることができる．この W を $T_{(x)}$ と $S_{(y)}$ との**直積** (direct product) とよび

$$W=T_{(x)}\times S_{(y)}=S_{(y)}\times T_{(x)}$$

と書く．

（証明） $\mathfrak{B}=\{\varphi(x,y)\}$ を $(\mathfrak{D}_{x\times y})$ の有界集合とする．$y^{(0)}$ を固定すると

$\{\varphi(x,y^{(0)})\ ;\ \varphi\in\mathfrak{B}\}$ は $(\mathfrak{D}_x)$ の有界集合になるから $T_{(x)}(\varphi(x,y^{(0)}))$ が定義されるが，

$$\{\psi(y^{(0)})\ ;\ \psi(y^{(0)})=T_{(x)}(\varphi(x,y^{(0)})),\ \varphi\in\mathfrak{B}\} \tag{4·5}$$

が $(\mathfrak{D}_{y^{(0)}})$ の有界集合になる．

まず $\mathfrak{B}$ が $(\mathfrak{D}_{x\times y})$ の有界集合であるから，R^n のコンパクト集合 K_x と R^m のコンパクト集合 K_y とがあって

$$\varphi\in\mathfrak{B} \text{ ならば } \mathrm{car.}(\varphi)\subseteqq\{(x,y);x\in K_x, y\in K_y\}$$

よって $y^{(0)}\notin K_y$ ならば $\varphi(x,y^{(0)})=0$ となって $\psi(y^{(0)})=0$ すなわち

$$\varphi\in\mathfrak{B} \text{ ならば } \mathrm{car.}(\psi)\subseteqq K_y$$

かつ有界集合 $\subseteqq(\mathfrak{D}_x)$ の超函数 $T_{(x)}$ による写像として (4·5)は $\varphi^{(0)}$ を動かすとき有界である（定理 3·3)．すべての偏微分 $D^{(p)}=\partial^{p_1+\cdots+p_m}/\partial y_1{}^{(0)p_1}\cdots\partial y_m{}^{(0)p_m}$ に対し

$$\{D^{(p)}\psi(y^{(0)})\ ;\ \varphi\in\mathfrak{B}\} \tag{4·6}$$

が $\varphi^{(0)}$ を動かすとき有界なことがいえれば (4·5) が $(\mathfrak{D}_{y^{(0)}})$ の有界集合であることがいえたことになる．ところが，例えば $D^{(p)}=\partial/\partial y_1{}^{(0)}$ に対して (4·6) の有界なことをいうには次のようにするとよい．

$$\frac{T_{(x)}(\varphi(x,y_1{}^{(0)}+h,y_2{}^{(0)},\cdots,y_m{}^{(0)}))-T_{(x)}(\varphi(x,y_1{}^{(0)},\cdots,y_m{}^{(0)}))}{h}$$
$$=T_{(x)}\left\{\frac{\varphi(x,y_1{}^{(0)}+h,y_2{}^{(0)},\cdots,y_m{}^{(0)})-\varphi(x,y_1{}^{(0)},\cdots,y_m{}^{(0)})}{h}\right\}$$

の｛　｝は平均値の定理で

$$\frac{\partial\varphi(x,y_1{}^{(0)}+\theta h,y_2{}^{(0)},\cdots,y_m{}^{(0)})}{\partial y_1{}^{(0)}},\quad 0<\theta<1$$

であるが，$\varphi\in\mathfrak{B}$ であるから，$|h|\leqq 1$ とするときこれらは x の函数として有界集合である．

故に定理 3·3 を用い

$$\{S_{(y)}T_{(x)}(\varphi(x,y))\ ;\ \varphi\in\mathfrak{B}\}$$

は有界であり，したがって

$$W^{(1)}(\varphi)=S_{(y)}T_{(x)}(\varphi(x,y))$$

によって超函数 $W^{(1)}\in(\mathfrak{D}_{x\times y})'$ が定義せられた．同様にして超函数

$$W^{(2)}(\varphi)=T_{(x)}S_{(y)}(\varphi(x,y))$$

が定義せられる．

明らかに

$$W^{(1)}(u(x)v(y))=W^{(2)}(u(x)v(y))=T_{(x)}(u(x))S_{(y)}(v(y))$$

であるから，定理 4·1 によって $(\mathfrak{D}_{x\times y})$ において稠密な $(\mathfrak{D}_x)\times(\mathfrak{D}_y)$ においては $W^{(1)}=W^{(2)}$ となり結局 $(\mathfrak{D}_{x\times y})$ において $W^{(1)}=W^{(2)}$ なることがわかった．$W=W^{(1)}=W^{(2)}$ が定理に求めるものである．（終）

上の証明中に次に述べられるような事実を用いた．これは以後しばしば必要となってくるので定理の形に述べておく．

定理 4·3 実数または複素数のパラメター λ を含む $\varphi(x,\lambda)$ が λ を fix するとき x の函数として $\in(\mathfrak{D}_{R^n})$ とする．もしも λ が $\lambda^{(0)}$ の近傍を動くとき，x の函数としての $\varphi(x;\lambda)$ の台が一定のコンパクト集合 $\subseteqq R^n$ に入っており，かつすべての $D^{(p)}$ に対して (x,λ) に関して連続な導函数 $\partial/\partial\lambda\cdot D^{(p)}\varphi(x,\lambda)$ が存在する[1]とする．このときすべての $T\in(\mathfrak{D}_{R^n})'$ に対して $T_{(x)}(\varphi(x,\lambda))$ は λ に関して連続微分可能で

$$\frac{d}{d\lambda}T_{(x)}(\varphi(x,\lambda))=T_{(x)}\left(\frac{\partial}{\partial\lambda}\varphi(x,\lambda)\right)$$

が成り立つ．

定理 4·4 $T_{(x)}\in(\mathfrak{D}_x)'$, $S_{(y)}\in(\mathfrak{D}_y)'$ の直積 $T_{(x)}\times S_{(y)}$ のごとき形のものの有限個の一次結合

$$\sum_{i=1}^{k}c_iT_{(x)}^{(i)}\times S_{(y)}^{(i)}$$

の全体を $(\mathfrak{D}_x)'\times(\mathfrak{D}_y)'$ と書いて $(\mathfrak{D}_x)'$ と $(\mathfrak{D}_y)'$ との直積とよぶならば，$(\mathfrak{D}_x)'\times(\mathfrak{D}_y)'$ は $\Longrightarrow$ $((\mathfrak{D}_{x\times y})')$ の意味で $(\mathfrak{D}_{x\times y})'$ において**全的** (total) である．すなわち，すべての $W\in(D_x)'\times(\mathfrak{D}_y)'$ に対して $W(\varphi)=0$ なる $\varphi\in$

---

1) この仮定から明らかに $\dfrac{\partial}{\partial\lambda}D^{(p)}\varphi(x,\lambda)=D^{(p)}\dfrac{\partial}{\partial\lambda}\varphi(x,\lambda)$ である．

$(\mathfrak{D}_{x\times y})$ は, $\varphi(x,y)\equiv 0$ 以外にはない.

(証明) あとで §5·2 に示すように, 任意の $T\in(\mathfrak{D}_{x\times y})'$ に対して $\{\psi_h(x,y)\}\subseteqq(\mathfrak{D}_{x\times y})$ を

$$T_{\psi_h}\Longrightarrow T\ ((\mathfrak{D}_{x\times y})')$$

なるごとく選ぶことができる. ところが定理 4·1 によって, 各 $\psi_h(x,y)$ に対して $\psi_{hi}(x,y)\in(\mathfrak{D}_x)\times(\mathfrak{D}_y)$ を

$$\psi_{hi}\Longrightarrow\psi_h\ ((\mathfrak{D}_{x\times y}))\quad (i\to\infty\ \text{なるとき})$$

なるごとく選ぶことができるから, $T_{\psi_{hi}}\in(\mathfrak{D}_x)'\times(\mathfrak{D}_y)'$ かつ $T_{\psi_{hi}}\Longrightarrow T_{\psi_h}$ $((\mathfrak{D}_{x\times y})')(i\to\infty$ なるとき) である. よって仮定から

$$T_{\psi_{hi}}(\varphi)=0,\ \text{したがって}\ T_{\psi_h}(\varphi)=0,\ \text{したがって, また}\ T(\varphi)=0$$

となり, $\varphi(x,y)\equiv 0$ でなけばならない. 例えば $\varphi(x^{(0)},y^{(0)}))\neq 0$ とすると, $T(\psi)=\psi(x^{(0)},y^{(0)})$ で定義される $T\in(\mathfrak{D}_{x\times y})'$ に対して $T(\varphi)\neq 0$ となるからである.

三つ以上の直積

$$(\mathfrak{D}_{x^{(1)}})\times(\mathfrak{D}_{x^{(2)}})\times\cdots\times(\mathfrak{D}_{x^{(k)}}),$$
$$(\mathfrak{D}_{x^{(1)}})'\times(\mathfrak{D}_{x^{(2)}})'\times\cdots\times(\mathfrak{D}_{x^{(k)}})'$$

も定義されて, **可換律**および**結合律**に従う. 例えば

$$(\mathfrak{D}_{x^{(1)}})\times\cdots\times(\mathfrak{D}_{x^{(k)}})=(\mathfrak{D}_{x^{(2)}})\times(\mathfrak{D}_{x^{(1)}})\times\cdots\times(\mathfrak{D}_{x^{(k)}}),$$
$$((\mathfrak{D}_{x^{(1)}})'\times\cdots\times(\mathfrak{D}_{x^{(k-1)}})')\times(\mathfrak{D}_{x^{(k)}})'$$
$$=(\mathfrak{D}_{x^{(1)}})'\times((\mathfrak{D}_{x^{(2)}})'\times\cdots\times(\mathfrak{D}_{x^{(k)}})')$$

また

$$D_x{}^{(p)}D_y{}^{(q)}D_z{}^{(r)}(T_{(x)}\times S_{(y)}\times U_{(z)})=D_x{}^{(p)}T_{(x)}\times D_y{}^{(q)}S_{(y)}\times D_z{}^{(r)}U_{(z)}$$

のごとき偏微分法則の成り立つことは明らかであろう. ここに $D_x{}^{(p)}$ と書いたのは $x=(x_1,\cdots,x_n)$ に関する偏微分作用素を示す. $D_y{}^{(q)}$, $D_z{}^{(r)}$ などについても同様である.

4.3 超函数の積・共役偏微分作用素

序論に述べたように, 任意の超函数 T と, $\alpha(x)\in(\mathfrak{E}_x)$ によって定義せられ

た超函数 T_α との積 (product) を

$$T\cdot T_\alpha(\varphi)=T_\alpha T(\varphi)=T(\alpha\varphi),\quad \varphi\in(\mathfrak{D}_x) \tag{4·7}$$

によって定義する．簡単のために

$$T_\alpha T=T\cdot T_\alpha=\alpha\cdot T \tag{4·8}$$

と書くことにする．このとき

定理 4·5

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(\alpha\cdot T)=\frac{\partial\alpha}{\partial x_i}\cdot T+\alpha\cdot\frac{\partial T}{\partial x_i} \tag{4·9}$$

$$(\alpha(x)\times\beta(y))\cdot(T_{(x)}\times S_{(y)})=(\alpha(x)\cdot T_{(x)})\times(\beta(y)\cdot S_{(y)}) \tag{4·10}$$

$$(\alpha\cdot\beta)\cdot T=\alpha\cdot(\beta\cdot T) \tag{4·11}$$

(証明)

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_i}(\alpha T)\right)(\varphi)=(\alpha T)\left(-\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\right)=-T\left(\alpha\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\right)$$

$$=-T\left(\frac{\partial\alpha\varphi}{\partial x_i}-\frac{\partial\alpha}{\partial x_i}\cdot\varphi\right)=\frac{\partial T}{\partial x_i}(\alpha\varphi)+\left(\frac{\partial\alpha}{\partial x_i}\cdot T\right)(\varphi)$$

$$=\left(\alpha\cdot\frac{\partial T}{\partial x_i}\right)(\varphi)+\left(\frac{\partial\alpha}{\partial x_i}\cdot T\right)(\varphi)$$

(4·10) および (4·11) は定義から明らかである．(終)

$(\mathfrak{E}_{R^n})$ に属する函数 $\alpha_p(x)$ を係数とする m 階の偏微分作用素 D を一般に

$$DT=\sum_{|p|\leqq m}\alpha_p(x)\cdot D^{(p)}T,\quad T\in(\mathfrak{D}_x)' \tag{4·12}$$

によって定義する．(4·7) により (1·15) を一般にした

$$\left.\begin{aligned}&(DT)(\varphi)=T(D'\varphi),\quad \varphi\in(\mathfrak{D}_x)\\ &D'\varphi(x)=\sum_{|p|\leqq m}(-1)^{|p|}D^{(p)}[\alpha_p(x)\varphi(x)]\end{aligned}\right\} \tag{4·13}$$

が成り立つ．この D' を D の**共役偏微分作用素** (adjoint differential operator) とよぶ．

定理 4·6 $D''=(D')'=D$ である．

(証明) 定義から

$$(D'T)(\varphi)=T(D''\varphi)$$

とくに $T=T_f$, $f\in(\mathfrak{E}_{R^n})$ ならば部分積分によって

$$(DT_f)(\varphi)=T_f(D'\varphi)=\int_{R^n}f(x)\cdot D'\varphi(x)dx$$

$$=\int_{R^n} Df(x)\cdot\varphi(x)dx=T_{Df}(\varphi) \tag{4·14}$$

を得る．car.(φ) がコンパクトであるから，部分積分で積分された項は $|x|\to\infty$ で0となるからである．(4·14) と同様にして

$$T_f(D''\varphi)=(D'T_f)(\varphi)=T_{D'f}(\varphi)=\int_{R^n} D'f(x)\cdot\varphi(x)dx$$

$$=\int_{R^n} f(x)\cdot D\varphi(x)dx=T_f(D\varphi)$$

故に $f(x)\in(\mathfrak{E}_{R^n})$ の任意なことから $D''\varphi(x)=D\varphi(x)$ が成り立たねばならない．故に $D=D''$．(終)

注意　超函数に関する偏微分方程式

$$DT=S,\quad (S \text{ は与えられた超函数})$$

を解くことは，すべての $\varphi\in(\mathfrak{D}_{R^n})$ に対して $T(D'\varphi)=S(\varphi)$ を満足する T を求めることになる．これについてはあとで論ずることにしよう．

4.4　$(\mathfrak{E}_{R^n})$ における除法

$\alpha(x)\in(\mathfrak{E}_{R^n})$ が決して0にならないとすれば，与えられた $S\in(\mathfrak{D}_x)'$ に対して

$$\alpha\cdot T=S \tag{4·15}$$

は $T=\dfrac{1}{\alpha}\cdot S$ によって解ける．超函数の除法を一般的に論ずるのには，次の除法定理 4·7 が基本になる．そのために，まず次の定義をおく．

C^k の定義　R^n のある開領域 G で定義せられた複素数値函数 $g(x)$ が，G で C^k であるというのは $g(x)$ が G で k 回連続偏微分可能なことをいう．$g(x)$ が G で C^0 であるというのは，$g(x)$ が G で連続なこと，また C^∞ であるというのは無限回（連続）偏微分可能なことを意味するわけである．

定理 4·7　$f(x)\in(\mathfrak{E}_{R^n})$ が超平面 $x_k=0$ で0になるならば，すなわち $f(x_1,\cdots,x_{k-1},0,x_{k+1},\cdots,x_n)\equiv 0$ ならば，$f(x)\equiv x_k\cdot e(x)$ となるような $e(x)\in(\mathfrak{E}_{R^n})$ が存在する．

（証明）　第一段：　$g(x)=g(x_1,\cdots,x_n)$ が開領域 $x_k\neq 0$ で C^1 であり，かつ $x_k\neq 0$ で連続な $g(x),\partial g/\partial x_1,\cdots,\partial g/\partial x_n$ が $x_k\neq 0$ を含めて（すなわち R^n

全体において）連続な函数 $g(x), g_1(x), \cdots, g_n(x)$ にそれぞれ**拡張** (extension) できるならば，$g(x)$ は $x_k=0$ を含めて（すなわち R^n 全体において）C^1 である．これを証明しよう．

$$h_i(x_1, \cdots, x_n) = \int_0^{x_i} g_i(x_1, \cdots, x_{i-1}, t, x_{i+1}, \cdots, x_n)dt$$

とおくと，$x_k \neq 0$ において

$$\frac{\partial h_i}{\partial x_i} = g_i = \frac{\partial g}{\partial x_i}, \quad \text{したがって} \quad \frac{\partial(h_i - g)}{\partial x_i} = 0$$

よって $h_i(x) - g(x)$ は $x_k \neq 0$ で x_i に依存せず，かつ R^n で C^0 である．よって $h_i(x) - g(x)$ は R^n で x_i に依存しない．だから R^n で $\partial(h_i - g)/\partial x_i \equiv 0$. 故に R^n で

$$\frac{\partial g}{\partial x_i} = \frac{\partial h_i}{\partial x_i} - \frac{\partial(h_i - g)}{\partial x_i} = \frac{\partial h_i}{\partial x_i} = g_i \in C^0$$

であり，結局 g は R^n で $\in C^1$ である．

第二段： $D_i^j f = \partial^j f / \partial x_i^j$ とおく．任意の整数 $m \geqq 0$ に対して開領域 $x_k \neq 0$ で連続な $D_k^m(f/x_k)$ が R^n 全体で C^0 なる函数に拡張できることを示そう．そのためには

$$f' = f - \sum_{i=0}^{m+1} x_k^i (i!)^{-1} (D_k^i f)_{x_k=0}$$

とおくとき，$D_k^m(f'/x_k)$ が R^n 全体で C^0 なる函数に拡張できればよい．Leibniz の微分公式で

$$D_k^m(f'/x_k) = \sum_{r=0}^{m} \binom{m}{r} D_k^r(1/x_k) \cdot D_k^{m-r} f' \qquad (4\cdot16)$$

$$= \sum_{r=0}^{m} \binom{m}{r} r!(-1)^r x_k^{-r-1} \cdot D_k^{m-r} f'$$

であるが，仮定 $f(x_1, \cdots, x_{k-1}, 0, x_{k+1}, \cdots, x_n) \equiv 0$ により，$x_k=0$ で $f', D_k^1 f', \cdots, D_k^{m+1} f'$ はすべて0となるから，Taylor の定理で，$0 < \theta_r < 1$ とし

$$D_k^{m-r}(f') = \frac{x_k^{r+1}}{(r+1)!} (D_k^{m+1} f')(x_1, \cdots, x_{k-1}, \theta_r x_k, x_{k+1}, \cdots, x_n)$$

となり，したがって

$$x_k^{-r-1}D_k^{m-r}f'=\frac{1}{(r+1)!}(D_k^{m+1}f')(x_1,\cdots,x_{k-1},\theta_r x_k,x_{k+1},\cdots,x_n)$$

となるから

$$D_k^m(f'/x_k)$$
$$=\sum_{r=0}^{m}\binom{m}{r}(-1)^r\frac{1}{r+1}(D_k^{m+1}f')(x_1,\cdots,x_{k-1},\theta_r x_k,x_{k+1},\cdots,x_n)$$

を得る． $x_k=0$ で $f',D_k^1f',\cdots,D_k^{m+1}f'$ が 0 であるから，この右辺の各項は $x_k\to 0$ なるとき 0 に収束する．しかもこの収束は $(x_1,\cdots,x_{k-1},x_{k+1},\cdots,x_n)$ が R^{n-1} の任意の有界領域に限られているとき $(x_1,\cdots,x_{k-1},x_{k+1},\cdots,x_n)$ に関して一様である．

したがって $D_k^m(f'/x_k)$ は R^n 全体で連続な函数（$x_k=0$ では 0 であるような）に拡張できる．

第三段： 任意の整数 $k_1,k_2,\cdots,k_n$ に対して，開領域 $x_k\neq0$ で定義せられた

$$D_k^{k_k}(D_n^{k_n}\cdots D_{k+1}^{k_{k+1}}D_{k-1}^{k_{k-1}}\cdots D_1^{k_1})(f/x_k) \tag{4·17}$$

が R^n 全体で定義せられた連続函数に拡張できることがいえれば，第一段の論法を繰返し用いて，$f(x)/x_k$ が R^n 全体で定義せられた C^∞ の函数に拡張されることがわかる．

ところで (4·17) を R^n 全体に連続に拡張するために

$$g=D_n^{k_n}\cdots D_{k+1}^{k_{k+1}}D_{k-1}^{k_{k-1}}\cdots D_1^{k_1}f$$

とおくと，$f(x_1,\cdots,x_{k-1},0,x_{k+1},\cdots,x_n)\equiv0$ という仮定から $g(x_1,\cdots,x_{k-1},0,x_{k+1},\cdots,x_n)\equiv0$. よって第二段から $D_k^{k_k}(g/x_k)$ は R^n 全体で C^0 なる函数に拡張できる．

4.5 超函数の除法

$S\in((\mathfrak{D}_{R^n}))'$ が与えられたとき

$$x_k\cdot T=S \tag{4·18}$$

を満足するような $T\in(\mathfrak{D}_{R^n})'$ を求める**除法問題**を考える．

定理 4·8 (4·18) は必ず解ける．

(証明) x_k の函数 $\varphi^{[k]}(x_k)\in(\mathfrak{D}_{x_k})$ が

$$\varphi^{[k]}(0)=1$$

を満足するとすれば，定理 4・7 によって，$\varphi\in(\mathfrak{D}_{R^n})$ に対して

$$\varphi(x_1,\cdots,x_n)-\varphi(x_1,\cdots,x_{k-1},0,x_{k+1},\cdots,x_n)\varphi^{[k]}(x_k)$$
$$=x_k\cdot\psi(x_1,\cdots,x_n) \tag{4・19}$$

となるような $\psi\in(\mathfrak{D}_{R^n})$ の存在することがわかる．$(\mathfrak{D}_{x_1,\cdots,x_{k-1},x_{k+1},\cdots,x_n})$ の上の任意の超函数 $U^{(k)}=U_{(x_1,\cdots,x_{k-1},x_{k+1},\cdots,x_n)}$ と任意の定数 $C^{[k]}$ に対して

$$T(\varphi)=U^{(k)}(\varphi(x_1,\cdots,x_{k-1},0,x_{k+1},\cdots,x_n))C^{[k]}+S(\psi) \tag{4・20}$$

を考える．$\varphi_h \Longrightarrow 0((\mathfrak{D}_{R^n}))$ ならば $\varphi_h(x_1,\cdots,x_{k-1},0,x_{k+1},\cdots,x_n) \Longrightarrow 0$ $((\mathfrak{D}_{x_1,\cdots,x_{k-1},x_{k+1},\cdots,x_n}))$ であり，また

$$\psi_h \Longrightarrow 0\ ((\mathfrak{D}_{R^n})) \tag{4・21}$$

も証明される．すなわち (4・19) の左辺を $\chi(x)$ とおけば，定理 4・7 の証明第二段からわかるように，

$$\max_{|x|\leqq t}|D^{(p)}\psi(x)|=\max_{|x|\leqq t}\left|D^{(p)}\frac{\chi(x)}{x_k}\right|$$
$$\leqq k_p(t)\max_{|x|\leqq t,|q|\leqq|p|+1}|D^{(q)}\chi(x)| \tag{4・22}$$

を満足する $k_p(t)<\infty$ が存在することがわかるからである．

故に (4・20) によって $T\in(\mathfrak{D}_{R^n})'$ が定義されたわけであるが，$x_k\cdot T=S$ である．任意の $\varphi_1\in(\mathfrak{D}_{R^n})$ に対して $\varphi=x_k\varphi_1$ とおけば $\varphi(x_1,\cdots,x_{k-1},0,x_{k+1},\cdots,x_n)=0$ となるから，(4・19) は

$$x_k\varphi_1=\varphi=x_k\psi \quad すなわち \quad \varphi_1=\psi$$

となり，(4・20) によって

$$x_k\cdot T(\varphi_1)=T(x_k\varphi_1)=T(\varphi)=S(\psi)=S(\varphi_1)$$

となるからである．(終)

系 $m_1,m_2,\cdots,m_n$ を整数 $\geqq 0$ とすれば，任意の $S\in(\mathfrak{D}_{R^n})$ に対して

$$(x_1-c_1)^{m_1}(x_2-c_2)^{m_2}\cdots(x_n-c_n)^{m_n}\cdot T=S$$

を満足するような $T\in(\mathfrak{D}_{R^n})'$ は存在する．

(証明) R^n の変数変換

$$(x_1, x_2, \cdots, x_n) \to (x_1, \cdots, x_{k-1}, x_k + c_k, x_{k+1}, \cdots, x_n)$$

によって

$$(x_k - c_k)T = S$$

が解けることがわかる．これを繰返してゆけばよい．(終)

定理 4・9 $S \in (\mathfrak{D}_{R^n})'$ と $\alpha(x) \in (\mathfrak{E}_{R^n})$ とが与えられたとき，適当に1の分解 $\{\varphi_i(x)\}$ をとるとき

$$S = 1 \cdot S = \left(\sum_{i=1}^{\infty} \varphi_i(x)\right) \cdot S = \sum_{i=1}^{\infty} \varphi_i \cdot S$$

の各項 $S_i = \varphi_i \cdot S$ に対して

$$\alpha \cdot T_i = S_i, \qquad \mathrm{car.}(T_i) \subseteqq \mathrm{car.}(\varphi_i)^{1)}$$

なる T_i が存在するならば除法問題

$$\alpha \cdot T = S$$

は $T = \sum_{i=1}^{\infty} T_i$ によって解ける．

(証明) $(\alpha \cdot T)(\varphi) = T(\alpha\varphi) = \sum_{i=1}^{\infty} T_i(\alpha\varphi) = \sum_{i=1}^{\infty} S_i(\varphi)$

$$= \sum_{i=1}^{\infty} (\varphi_i \cdot S)(\varphi) = \left(\left(\sum_{i=1}^{\infty} \varphi_i\right) \cdot S\right)(\varphi) = (1 \cdot S)(\varphi) = S(\varphi)$$

であるからである．(終)

注意 上の定理を標語的に，“S の $\alpha(x)$ による除法が局所的に可能ならば，S の $\alpha(x)$ による大局的な除法が可能である” ということにしよう．

R^n の各点 $x^{(0)} = (x_1^{(0)}, \cdots, x_n^{(0)})$ において適当な近傍 $U(x^{(0)})$，$V(x^{(0)})$ をとると，$U(x^{(0)})$ と $V(x^{(0)})$ との1対1対応：

$$U(x^{(0)}) \ni x = (x_1, \cdots, x_n) \to x' = (x_1', \cdots, x_n') \in V(x^{(0)})$$

で

$$\left.\begin{array}{c} x_i = f_i^{(0)}(x_1', \cdots, x_n'), \quad (i = 1, 2, \cdots, n) \\ (x_i^{(0)} = f_i^{(0)}(x_1^{(0)}, \cdots, x_n^{(0)})) \end{array}\right\} \quad (4 \cdot 23)$$

1) $\alpha \cdot \hat{T}_i = S_i$ なる “商” $\hat{T}_i$ が存在すれば，car.(φ_1) では $\equiv 1$ になるような $\beta_i(x) \in (\mathfrak{D}_{R^n})$ を乗じたもの $T_i = \beta_i \cdot \hat{T}_i$ の car.(T_i) は $\subseteqq$ car.(φ_i) であり，かつ $\alpha \cdot T_i = S_i$ である．car.$(S_i) \subseteqq$ car.(φ_i) であるからである．

が $V(x^{(0)})$ で C^∞ かつ

$$\alpha(f_1^{(0)}(x_1', \cdots, x_n'), f_2^{(0)}(x_1', \cdots, x_n'), \cdots, f_n^{(0)}(x_1', \cdots, x_n')) = x_1'$$

とできるような $(f_1^{(0)}, \cdots, f_n^{(0)})$ を選べるとすれば，R^n の各点 $x^{(0)}$ の近傍で局所的に S の $\alpha(x)$ による除法が可能である．$x^{(0)}$ の近傍 $V(x^{(0)})$ で座標系 $(x_1', \cdots, x_n')$ をとれば α は x_1' となり，定理 4·7 で x_1' による除法は可能だからである．だからこのとき S は大局的に $\alpha(x)$ で除法可能である．R^n の開被覆 $\{V(x^{(0)})\ ;\ x^{(0)} \in R^n\}$ に対応する 1 の分解 $\{\varphi_i(x)\}$ をとって定理 4·8 を応用すればよいのである．

ところで上のような変数変換 (4·23) が存在するための十分条件は

$$\frac{\partial\alpha}{\partial x_1}, \frac{\partial\alpha}{\partial x_2}, \cdots, \frac{\partial\alpha}{\partial x_n}$$

がすべて同時には $x^{(0)}$ で 0 にならないことであることは，陰函数の存在定理を使えば容易にわかるであろう．

第 5 章　畳み込み (convolution)

5.1　超函数の畳み込み

函数の畳み込み　$f(x), g(x)$ が R^n で局所可積分であり，かつ $f(x)$ または $g(x)$ のいずれか一方の台がコンパクトとすれば，f と g との畳み込みが定義される．すなわち $x-y=(x_1-y_1, \cdots, x_n-y_n)$ として，殆んどすべての x に対して積分

$$f*g(x)=\int_{R^n} f(x-y)g(y)dy \tag{5·1}$$

が収束しかつ殆んどすべての x に対して

$$f*g(x)=g*f(x) \tag{5·2}$$

（証明）　car.$(f)=K_f$ をコンパクトとする．任意のコンパクト集合 $K \subseteqq R^n$ に対して

$$y \notin K-K_f=\{k-k_f; k \in K, k_f \in K_f\} \text{ ならば } x \in K \text{ なるとき } f(x-y)=0$$

よって $y \notin K-K_f$ ならば $\int_K |f(x-y)|dx=0$，すなわち y の函数 $\int_K |f(x-y)|dx$ はコンパクトな台をもち，かつ $\leqq \int_{R^n} |f(x-y)|dx=\int_{K_f} |f(x)|dx<\infty$. よって g の局所可積分なことから

$$\int_{R^n} |g(y)| \left(\int_K |f(x-y)|dx \right) dy<\infty$$

故に (x, y) の可測函数 $f(x-y)g(y)$ に対して Fubini-Tonelli の定理が使える．すなわち下の二つの積分はともに収束して相等しい：

$$\int_{R^n} dy \int_K f(x-y)g(y)dx=\int_K dx \int_{R^n} f(x-y)g(y)dy$$

この右辺は変数変換 $y=x-z$ で

$$=\int_K dx \int_{R^n} g(x-z)f(z)dz$$

K は任意のコンパクト集合であったから，殆んどすべての x に対して積分

$g*f(x)$ が収束し，かつ変数変換 $z=x-y$ でわかるように $=f*g(x)$.

car.(g) がコンパクトのときにも f と g とを入れかえて同様に証明される.

上の畳み込みを超函数の場合に拡張することができる．すなわち

定理 5·1 超函数 $T=T_{(x)}$, $S=S_{(y)}$ の少なくとも一方の台がコンパクトとする．このとき任意の $\varphi\in(\mathfrak{D}_{R^n})$ に対して

$$T*S(\varphi)=T_{(x)}(S_{(y)}(\varphi(x+y)))=S_{(y)}(T_{(x)}(\varphi(x+y))) \qquad (5\cdot3)$$

によって超函数 $T*S$ が定義される．もしも局所可積分な $f(x), g(x)$ によって $T=T_f$, $S=T_g$ なるときには，f か g の少なくとも一方の台がコンパクトとすると

$$T*S=T_f*T_g=T_{f*g} \qquad (5\cdot4)$$

が成り立つ.

（証明） car.(T)=car.$(T_{(x)})$ をコンパクトとする．car.(T_x) の上で1になるような $\alpha(x)\in(\mathfrak{D}_{R^n})$ をとると，任意の $\varphi(x)\in(\mathfrak{D}_{R^n})$ に対して

$$\alpha(x)\varphi(x+y)\in(\mathfrak{D}_{R^{2n}})=(\mathfrak{D}_{x\times y}),$$

であるから

$$T_{(x)}\times S_{(y)}(\alpha(x)\varphi(x+y)) \qquad (5\cdot5)$$

が定義される．$\psi_h(x,y)\Longrightarrow 0\ ((\mathfrak{D}_{x\times y}))$ ならば $T_{(x)}\times S_{(y)}(\psi_h(x,y))\to 0$ である．ところが $\varphi_h(x)\Longrightarrow 0((\mathfrak{D}_x))$ なるとき $\psi_h(x,y)=\alpha(x)\varphi_h(x+yh)\Longrightarrow 0$ $((\mathfrak{D}_{x\times y}))$ となるから $T_{(x)}\times S_{(y)}(\alpha(x)\varphi_h(x+y))\to 0$. 故に (5·5) によって超函数 $T*S\in(\mathfrak{D}_{R^n})$ が定義され，かつ Fubini の定理 (4·4) により

$$\begin{aligned}T*S(\varphi)&=T_{(x)}\times S_{(y)}(\alpha(x)\varphi(x+y))\\&=T_{(x)}(S_{(y)}(\alpha(x)\varphi(x+y)))\\&=S_{(y)}(T_{(x)}(\alpha(x)\varphi(x+y)))\end{aligned} \qquad (5\cdot6)$$

ところが $\alpha(x)$ は $T_{(x)}\in(\mathfrak{E}_{R^n})'$ の台の上で1となるから $T_{(x)}((1-\alpha(x))\varphi(x+y))=0$ となり

$$\begin{aligned}T_{(x)}(\alpha(x)\varphi(x+y))&=T_{(x)}(\alpha(x)\varphi(x+y))+T_{(x)}((1-\alpha(x))\varphi(x+y))\\&=T_{(x)}(\varphi(x+y))\end{aligned}$$

同じように

$$T_{(x)}(S_{(y)}(\alpha(x)\varphi(x+y)))=T_{(x)}(\alpha(x)S_{(y)}(\varphi(x+y)))$$
$$=T_{(x)}(S_{(y)}(\varphi(x+y)))$$

よって (5·3) がいえた.

最後に (5·4) の証明. (5·3) によって

$$T_f*T_g(\varphi)=\int_{R^n}f(x)\,dx\left(\int_{R^n}g(y)\,\varphi(x+y)\,dy\right)$$
$$=\int_{R^n}f(x)\,dx\int_{R^n}g(\eta-x)\varphi(\eta)\,d\eta$$
$$=\int_{R^n}\left\{\int_{R^n}f(x)g(\eta-x)\,dx\right\}\varphi(\eta)\,d\eta=T_{f*g}(\varphi)$$

二行目から三行目に積分の順序を変化したのは f, g, φ の中の少なくとも二つの台がコンパクトなことを使って Fubini–Tonelli の定理を使ったのである[1]. (終)

系 $(\mathfrak{D}_{R^n})$ の上の超函数 $T^{(1)}, T^{(2)}, \cdots, T^{(k)}$ のうち高々一つ以外はすべてコンパクトな台をもっているとすれば,

$$T^{(1)}*T^{(2)}*\cdots*T^{(k)}$$

が定義され, かつ"乗法" $*$ は可換律および結合律に従う. 例えば

$$T^{(1)}*T^{(2)}*T^{(3)}=T^{(2)}*T^{(1)}*T^{(3)}$$
$$(T^{(1)}*T^{(2)})*T^{(3)}=T^{(1)}*(T^{(2)}*T^{(3)})$$

(証明) $T^{(1)}, T^{(2)}, \cdots, T^{(k)}$ の台をいずれもコンパクトとし $\alpha_i(x)\in(\mathfrak{D}_{R^n})$ を T_i の台の上で1なる函数とし $(i=1,2,\cdots,k-1)$

$$T^{(1)}*T^{(2)}*\cdots*T^{(k)}(\varphi)$$
$$=T^{(1)}_{(x^{(1)})}\times T^{(2)}_{(x^{(2)})}\times\cdots\times T^{(k)}_{(x^{(k)})}\left(\prod_{i=1}^{k-1}\alpha_i(x^{(i)})\cdot\varphi\left(\sum_{i=1}^{k}x^{(i)}\right)\right)$$

と定義すればよい,

定理 5·2

i) $T*T_\delta=T_\delta*T=T$ (5·7)

ii) $\dfrac{\partial T}{\partial x_k}=T*\dfrac{\partial T_\delta}{\partial x_k}=\dfrac{\partial T_\delta}{\partial x_k}*T$ (5·8)

---

1) 函数の場合に $f*g(x)=g*f(x)$ を証明したのと同じである.

iii) $$\frac{\partial}{\partial x_k}(T*S)=\frac{\partial T}{\partial x_k}*S=T*\frac{\partial S}{\partial x_k} \tag{5・9}$$

iv) $\tau_h T$ を $(\tau_h T)(\varphi)=T_x(\varphi(x+h))$ によって定義すれば

$$\tau_h T=T*T_{\delta_h} \qquad \text{ただし}\ T_{\delta_h}(\varphi)=\varphi(h) \tag{5・10}$$

(証明) i) $T*T_\delta(\varphi)=T_{(x)}(\varphi(x+y)_{y=0})=T(\varphi)$

ii) $$\frac{\partial T_\delta}{\partial x_k}*T(\varphi)=\frac{\partial T_\delta}{\partial x_k}(T_{(y)}(\varphi(x+y)))$$

$$=(-1)\left[\frac{\partial}{\partial x_k}(T_{(y)}(\varphi(x+y)))\right]_{x=0}=(-1)T_{(y)}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial y_k}\right)^{1)}$$

$$=\frac{\partial T}{\partial y_k}(\varphi(y))=\frac{\partial T}{\partial x_k}(\varphi(x))$$

iii) は ii) を用い結合律によって

$$\frac{\partial}{\partial x_k}(T*S)=\frac{\partial T_\delta}{\partial x_k}*(T*S)=\left(\frac{\partial T_\delta}{\partial x_k}*T\right)*S$$

$$=\frac{\partial T}{\partial x_k}*S$$

iv) は明らかである.(終)

5.2 超函数の正則化

定理 5・3 $T\in(\mathfrak{D}_{R^n})', \alpha(x)\in(\mathfrak{D}_{R^n})$ または $T\in(\mathfrak{E}_{R^n})', \alpha(x)\in(\mathfrak{E}_{R^n})$ ならば

$$T*T_\alpha=T_{\tilde\alpha}, \qquad \tilde\alpha(x)=T_{(t)}(\alpha(x-t))\in(\mathfrak{E}_{R^n}) \tag{5・11}$$

である.

(証明) $\alpha\in(\mathfrak{D}_{R^n})$ すなはち car.(α) がコンパクトな場合には

$$T*T_\alpha(\varphi)=T_{(x)}\int_{R^n}\alpha(y)\varphi(x+y)dy=T_{(x)}\int_{R^n}\alpha(t-x)\varphi(t)dt$$

$$=T_{(x)}(T_{\varphi(t)}(\alpha(t-x)))=T_{(x)}\times T_{\varphi(t)}(\alpha(t-x))$$

$$=T_{\varphi(t)}\times T_{(x)}(\alpha(t-x))=T_{\varphi(t)}(T_{(x)}(\alpha(t-x)))=T_{\tilde\alpha}(\varphi)$$

もし $T\in(\mathfrak{E}_{R^n})'$ すなわち car.T がコンパクトならば

---

1) 定理 4・3 によって $\frac{\partial}{\partial x_k}T_y(\varphi(x+y))=T_y\left(\frac{\partial}{\partial x_k}\varphi(x+y)\right)$

$$T*T_\alpha(\varphi)=T_\alpha*T(\varphi)=\int_{R^n}\alpha(y)\cdot T_{(x)}(\varphi(x+y))dy$$

$\beta(x)\in(\mathfrak{D}_{R^n})$ を car.(T) の上で 1 となる函数とすると $T_{(x)}(\varphi(x+y))=T_{(x)}(\beta(x)\varphi(x+y)+(1-\beta(x))\varphi(x+y))=T_{(x)}(\beta(x)\varphi(x+y))$ であるから

$$T*T_\alpha(\varphi)=\int_{R^n}\alpha(y)T_{(x)}(\beta(x)\varphi(x+y))dy$$

$$=T_{\alpha(y)}\times T_{(x)}(\beta(x)\varphi(x+y))=T_{(x)}\times T_{\alpha(y)}(\beta(x)\varphi(x+y))$$

$$=T_{(x)}\left(\beta(x)\int_{R^n}\alpha(y)\varphi(x+y)dy\right)=T_{(x)}\left(\beta(x)\int_{R^n}\alpha(t-x)\varphi(t)dt\right)$$

これは $\alpha\in(\mathfrak{D}_{R^n})$ の場合と同様に

$$=T_{\varphi(t)}(T_{(x)}(\beta(x)\alpha(t-x)))$$

$$=T_{\varphi(t)}(T_{(x)}(\alpha(t-x)))^{1)}=T_{\tilde{\alpha}}(\varphi)$$

最後に $T_{(x)}(\alpha(t-x))$ が t の函数として $(\mathfrak{E}_{R^n})$ に属することの証明は，定理 4・3 によって

$D_{(t)}^{(p)}=\partial^{p_1+\cdots+p_n}/\partial t_1^{p_1}\cdots\partial t_n^{p_n}$ に対して

$$D_{(t)}^{(p)}(T_{(x)}(\alpha(t-x)))=T_{(x)}(D_{(t)}^{(p)}\alpha(t-x))$$

の成り立つことから明らかである．(終)

$T*T_\alpha$ を T の**正則化**という．T_α を畳み込むことによって $T*T_\alpha$ が $(\mathfrak{E}_{R^n})$ に属する $\tilde{\alpha}(x)$ で定義された超函数になる——本質的には $(\mathfrak{E}_{R^n})$ に属する函数 $\tilde{\alpha}(x)$ になる——からである．

上の定理によって，$(\mathfrak{D}_{R^n})$ や $(\mathfrak{D}_{R^n})'$ の反射性の証明中に必要となった次の基本定理が証明される．

定理 5・4 任意の $T\in(\mathfrak{D}_{R^n})'$ に対して $(\mathfrak{D}_{R^n})$ の函数列 $\{\psi_h(x)\}$ を

$$T_{\psi_h}\Longrightarrow T((\mathfrak{D}_{R^n})')$$

なるように選ぶことができる．

(証明) $\alpha_h(x)\in(\mathfrak{D}_{R^n})$ および $\beta_h(x)\in(\mathfrak{D}_{R^n})$ を次のように選ぶ．

---

1) $\beta(x)$ は car.(T) の上で 1 であるから，すぐ上に示したように
$T_{(x)}(\beta(x)\psi(x))=T(\psi)$, $\psi\in(\mathfrak{E}_{R^n})$

$$\left.\begin{array}{l}|x|\leqq h \quad \text{で}\ \alpha_h(x)\equiv 1, \\ |x|\geqq h^{-1}\ \text{で}\ \beta_h(x)\equiv 0,\ \beta_h(x)\geqq 0\ \text{かつ}\ \int_{R^n}\beta_h(x)dx=1\end{array}\right\} \quad (5\cdot 12)$$

$\beta_h(x)$ としては例えば

$$\beta_h(x)=\begin{cases}c_h\cdot\exp((|x|^2-h^{-2})^{-1}), & |x|<h^{-1}\ \text{のとき} \\ 0, & |x|\geqq h^{-1}\ \text{のとき}\end{cases}$$

において，正数 c_h を $\int_{R^n}\beta_h(x)dx=1$ となるようにとるとよい．(5·11) によって

$$(\alpha_h T)*T_{\beta_h}=T_{\psi_h},$$

$$\psi_h(x)=T_{(t)}(\alpha_h(t)\beta_h(x-t))$$

で，α_h も β_h も $\epsilon(\mathfrak{D}_{R^n})$ であるから定理 4·3 によって $\psi_h\epsilon(\mathfrak{D}_{R^n})$ である．

故に，収束定理を用い，各 $\varphi\epsilon(\mathfrak{D}_{R^n})$ において $\lim_{h\to\infty}T_{\psi_h}(\varphi)=T(\varphi)$ がいえるとよい．ところが

$$T_{\psi_h}(\varphi)=(\alpha_h\cdot T)*T_{\beta_h}(\varphi)=T_{(x)}\left(\alpha_h(x)\int_{R^n}\beta_h(y)\varphi(x+y)dy\right)$$

であるから

$$\varphi_h(x)=\int_{R^n}\alpha_h(x)\beta_h(y)\varphi(x+y)dy\Longrightarrow\varphi(x)\quad((\mathfrak{D}_{R^n}))$$

がいえればよい．

ところが car.$(\varphi)=K$ とすると $\int_{R^n}\beta_h(y)\varphi(x+y)dy$ の台は $\subseteqq\{x\,;\,x=k+l,\ k\epsilon K,\ |l|\leqq h^{-1}\}\subseteqq\{x\,;\,x=k+l,\ x\epsilon K,\ |l|\leqq 1\}$．この最後の集合は h に無関なコンパクト集合であるから，十分大きな h に対して

$$\varphi_h(x)=\int_{R^n}\beta_h(y)\varphi(x+y)dy$$

である．$|x|\leqq h$ において $\alpha_h(x)=1$ であるからである．よって任意の p に対して

$$D^{(p)}_{(x)}\left(\int_{R^n}\beta_h(y)\varphi(x+y)dy\right)=\int_{R^n}\beta_h(y)D^{(p)}_{(x)}\varphi(x+y)dx^{1)}$$

---

1) $D^{(p)}_{(x)}$ と $\int_{R^n}$ とが可換なことは β_h および φ がコンパクトな台をもつことによる．

が一様に $D^{(p)}_{(x)}\varphi(x)$ に収束することがいえるとよい．$\int_{R^n}\beta_h(y)dy=1$ から

$$D^{(p)}_{(x)}\varphi(x)=\int_{R^n}\beta_h(y)D^{(p)}_{(x)}\varphi(x)dy$$

を得るから，$\beta_h(y)\geqq 0$ によって

$$\left|D^{(p)}_{(x)}\varphi_h(x)-D^{(p)}_{(x)}\varphi(x)\right|\leqq\int_{R^n}\beta_h(y)\left|D^{(p)}_{(x)}(\varphi(x+y)-\varphi(x))\right|dy$$

$$\leqq\varepsilon\cdot\int_{|\ |\leqq\varepsilon}\beta_h(y)dy+\int_{|y|\leqq h^{-1}\text{ かつ }|\ |>\varepsilon}\beta_h(y)\left|D^{(p)}_{(x)}(\varphi(x+y)-\varphi(x))\right|dy$$

この最後の右辺第一項は $\leqq\varepsilon$. また $\varphi\in(\mathfrak{D}_{R^n})$ によって $\varphi(x)$ は一様連続函数，したがって十分大きな h に対しては $\{y\,;\,|y|<h^{-1}\}$ と $\{y\,;\,|D^{(p)}_{(x)}(\varphi(x+y)-\varphi(x))|<\varepsilon\}$ とは共通点がない．故に最後の右辺第二項の積分の積分範囲は，十分大きな h に対して空集合となり積分は 0. よって $D^{(p)}_{(x)}\varphi_h(x)$ は $h\to\infty$ なるとき $D^{(p)}_{(x)}\varphi(x)$ に一様収束する．(終)

系 1 とくに $T\in(\mathfrak{E}_{R^n})'$ ならば各 $\psi_h(x)\in(\mathfrak{D}_{R^n})$ の台は一定のコンパクト集合に入っているとして

$$\text{すべての }\varphi\in(\mathfrak{E}_{R^n})\text{ に対して，}\lim_{h\to\infty}T_{\psi_h}(\varphi)=T(\varphi)$$

とできる．

(証明) 上の証明で $\alpha_h(x)\in(\mathfrak{D}_{R^n})$ を car.(T) の上で1になる一定の函数にとればよい．(終)

5.3 移動によつて不変な超函数

移動の定義 $h=(h_1,\cdots,h_n)$ として，超函数 T の第 k 座標の方向への h_k だけの移動 (translation) を

$$\left.\begin{aligned}&(\tau_{h_k}T)(\varphi)=T_{(x)}(\varphi(x+h_k)),\\ &\text{ただし}\quad x+h_k=(x_1,\cdots,x_{k-1},x_k+h_k,x_{k+1},\cdots,x_n)\end{aligned}\right\}\qquad(5\cdot10)'$$

によって定義する．(5·10) における τ_h の特別の場合にあたるわけである．函数 $\varphi(x)=\varphi(x_1,\cdots,x_n)$ が x_k に依存しないという概念を超函数の場合に拡張して

定理 5·5 T が第 k 座標の方向への移動に対して不変，すなわちすべての実数 h_k に対して $\tau_{h_k}T=T$ となるための必要かつ十分な条件は $\dfrac{\partial T}{\partial x_k}=0$ である．

（証明） 必要なこと ： $T_{(x)}(\varphi(x+h_k))=T_{(x)}(\varphi(x))$ から

$$T_{(x)}\left(\frac{\varphi(x+h_k)-\varphi(x)}{h_k}\right)=0$$

を得る．ところが $h_k\to 0$ なるとき $\dfrac{\varphi(x+h_k)-\varphi(x)}{h_k}\Longrightarrow\dfrac{\partial\varphi(x)}{\partial x_k}((\mathfrak{D}_{R^n}))$ なることは容易にわかるから $T_{(x)}\left(\dfrac{\partial\varphi(x)}{\partial x_k}\right)=0$ すなわち $\dfrac{\partial T}{\partial x_k}=0$.

十分なこと ： 任意の $\varphi\in(\mathfrak{D}_x)$ に対して $T*T_\varphi=T_{\tilde{\varphi}}$，$\tilde{\varphi}\in(\mathfrak{E}_{R^n})$，かつ (5·9) によって

$$\frac{\partial}{\partial x_k}(T*T_\varphi)=\frac{\partial T}{\partial x_k}*T_\varphi$$

であるから $\dfrac{\partial T}{\partial x_k}=0$ という仮定によって $\dfrac{\partial T_{\tilde{\varphi}}}{\partial x_k}=0$. 故に $\tilde{\varphi}\in(\mathfrak{E}_{R^n})$ によって $\dfrac{\partial T_\varphi}{\partial x_k}=T_{\partial\varphi/\partial x_k}=0$，すなわち $\dfrac{\partial\tilde{\varphi}}{\partial x_k}=0$ を得て $\tilde{\varphi}(x)=\tilde{\varphi}(x_1,\cdots,x_n)$ は x_k に依存しない．(5·11) によって $\tilde{\varphi}(x)=T_{(t)}(\varphi(x-t))$ であるから

$$\tilde{\varphi}(x+h_k)=T_{(t)}(\varphi(x+h_k-t))=(\tau_{h_k}T_{(t)})(\varphi(x-t))$$
$$=\tilde{\varphi}(x)=T_{(t)}(\varphi(x-t))$$

ということになった．よって $x=0$ として，すべての $\varphi\in(\mathfrak{D}_{R^n})$ およびすべての実数 h_k に対して

$$(\tau_{h_k}T_{(t)})(\varphi(-t))=T_{(t)}(\varphi(-t))$$

が成り立つ．$\varphi(t)$ が $(\mathfrak{D}_{R^n})$ 全体を動くとき $\varphi(-t)$ も $(\mathfrak{D}_{R^n})$ 全体を動くから $\tau_{h_k}T=T$ でなければならない．（終）

$\dfrac{\partial T}{\partial x_k}=0$ なる T の具体的な形を求めることができる．記法を簡単にするために $k=1$ として考えよう．

定理 5·6 $\dfrac{\partial T}{\partial x_1}=0$ ならば，$(\mathfrak{D}_{x_2\times\cdots\times x_n})'$ に属する $S_{(x_2,\cdots,x_n)}$ を適当にとって

$$\left.\begin{aligned} T_{(x)}(\varphi(x)) &= S_{(x_2,\cdots,x_n)}\left(\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(t_1,x_2,\cdots,x_n)dt_1\right) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty}\{S_{(x_2,\cdots,x_n)}(\varphi(t_1,x_2,\cdots,x_n))\}dt_1 \end{aligned}\right\} \quad (5\cdot13)$$

と表わせる．逆にこのような T が $\dfrac{\partial T}{\partial x_1}=0$ を満足することは明らかである．

（証明） $\varphi(x_1,\cdots,x_n)\in(\mathfrak{D}_{R^n})$ が

$$\left.\begin{aligned} &\varphi(x_1,\cdots,x_n)=u(x_1)v(x_2,,\cdots,x_n) \\ &\text{ただし}\quad u(x_1)\in(\mathfrak{D}_{x_1}),\quad v(x_2,\cdots,x_n)\in(\mathfrak{D}_{x_2\times\cdots\times x_n}) \end{aligned}\right\}$$

なる形の場合に，$T(uv)$ を u の加法的汎函数と考えて——v はしばらく fix しておいて——

$$T(uv)=F(u),\qquad F\in(\mathfrak{D}_{x_1})'$$

と書く．$\dfrac{\partial T}{\partial x_1}=0$ から $\dfrac{dF}{dx_1}=0$ である．

$\varphi_0(x_1)\in(\mathfrak{D}_{x_1})$ で $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\varphi_0(x_1)dx_1=1$ になるものを選び

$$u(x_1)=\varphi_0(x_1)\int_{-\infty}^{\infty}u(t_1)dt_1+\chi(x_1)$$

とおく．明らかに $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\chi(x_1)dx_1=0$ である．よって $\chi(x)$ は

$$\psi(x_1)=\int_{-\infty}^{x_1}\chi(t_1)dt_1\in(\mathfrak{D}_{x_1})$$

の導函数になる．car.(χ) がコンパクトで $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\chi(x_1)dx_1=0$ であるために car.(ψ) がコンパクトでなければならないからである．故に $\dfrac{dF}{dx_1}=0$ から $F(\chi)=F\left(\dfrac{d\psi}{dx_1}\right)=-\dfrac{dF}{dx_1}(\psi)=0$ を得て

$$F(u)=\int_{-\infty}^{\infty}u(t_1)dt_1\cdot F(\varphi_0)=C\cdot\int_{-\infty}^{\infty}u(t_1)dt_1$$

この定数 C は一般に v に依存するはずであるから

$$T(uv)=C(v)\int_{-\infty}^{\infty}u(t_1)dt_1$$

この左辺は v の加法的連続汎函数であるから

$$T(uv)=S_{(x_2,\cdots,x_n)}(v(x_2,\cdots,x_n))\cdot\int_{-\infty}^{\infty}u(t_1)dt_1$$

となるような $S_{(x_2,\cdots,x_n)}\in(\mathfrak{D}_{x_2\times\cdots\times x^n})'$ が存在する．

故に[1)]

$$T=T_{(x)}=(T_1)_{(x_1)}\times S_{(x_2,\cdots,x_n)}$$

と T は直積で表わされる．したがって Fubini の定理(4·4)によって (5·13) を得る．(終)

5.4 畳み込みの特徴づけ

任意に $S\in(\mathfrak{D}_{R^n})'$ を固定すると．$(\mathfrak{E}_{R^n})'$ から $(\mathfrak{D}_{R^n})'$ の中への写像

$$(\varepsilon_{R^n})'\ni T\to\mathfrak{L}(T)=T*S \tag{5·14}$$

が定義される．$\mathfrak{L}$ は加法的であり：

$$\mathfrak{L}(\alpha_1T_1+\alpha_2T_2)=(\alpha_1T_1+\alpha_2T_2)*S$$
$$=\alpha_1T_1*S+\alpha_2T_2*S=\alpha_1\mathfrak{L}(T_1)+\alpha_2\mathfrak{L}(T_2)$$

かつ連続：

$$T_h\Longrightarrow 0\ ((\mathfrak{E}_{R^n})')\ \text{ならば}^{2)}\ \mathfrak{L}(T_h)\Longrightarrow 0\ ((\mathfrak{D}_{R^n})') \tag{5·15}$$

である．

(証明) $\mathfrak{L}(T_h)(\varphi)=T_h*S(\varphi)=(T_{h(x)})(S_{(y)}(\varphi(x+y)))$ であり，$S_{(y)}(\varphi(x+y))\in(\mathfrak{E}_{R^n})$ なることは定理 4·3 によって

$$D^{(p)}_{(x)}S_{(y)}(\varphi(x+y))=S_{(y)}(D^{(p)}_{(x)}\varphi(x+y))$$

を得ることからわかる．したがって $T_h\Longrightarrow 0\ (\mathfrak{E}_{R^n})'$ なる仮定から

$$\mathfrak{L}(T_h)(\varphi)\to 0\ (h\to\infty)$$

故に収束定理で $\mathfrak{L}(T_h)\Longrightarrow 0((\mathfrak{D}_{R^n})')$．(終)

$\mathfrak{L}(T)$ はまた任意の移動と可換である：すなわち

$$\tau_h(T)=\mathfrak{L}(\tau_hT)$$

---

1) $T_{1(x_1)}(u(x_1))=\int_{-\infty}^{\infty}1\cdot u(x_1)dx_1=\int_{-\infty}^{\infty}u(x_1)dx_1$

2) 各 $\psi\in(\mathfrak{E}_{R^n})$ に対して $T_h(\psi)\to 0$ なること

なぜなら, $\tau_h\mathfrak{L}(T)(\varphi)=\tau_h(T*S)(\varphi)=T_{(x)}(S_{(y)}(\varphi(x+y+h))$, $\mathfrak{L}(\tau_h T)(\varphi)=(\tau_h T)*S(\varphi)=(\tau_h T)_{(x)}(S_{(y)}(\varphi(x+y)))=T_{(x)}(S_{(y)}(\varphi(x+y+h))$.

以上の三つの性質が畳み込みを特徴づけることを証明することができる. すなわち

定理 5·7 $(\mathfrak{E}_{R^n})'$ から $(\mathfrak{D}_{R^n})'$ への加法的連続な写像 $\mathfrak{L}$ が任意の移動と可換であるための必要かつ十分な条件は,

$$\mathfrak{L}(T)=T*S \tag{5·16}$$

なる $S\in(\mathfrak{D}_{R^n})'$ が存在することである.

(証明) $\psi(x)\in(\mathfrak{D}_{R^n}), \varphi(x)\in(\mathfrak{E}_{R^n})$ とすれば, $T_\psi\in(\mathfrak{E}_{R^n})'$ である.

$$T_\psi(\varphi)=\int_{R^n}\psi(x)\varphi(x)dx=\int_{\mathrm{car.}(\psi)}\psi(x)\varphi(x)dx$$

を次のごとく Riemann 和で近似する. コンパクトな car.(ψ) を, その**直径**が $\leqq h^{-1}$ であるような領域 $\Delta_{h1}, \Delta_{h2}, \cdots, \Delta_{hk_h}$ に分割し[1], 各 Δ_{hi} からそれぞれ一点 $x^{(hi)}$ を選び

$$\sum_{i=1}^{k_h} c_{hi}\psi(x^{(hi)})\varphi(x^{(hi)}), \qquad c_{hi}=\int_{\Delta_{hi}}dx \tag{5·17}$$

をつくる. $\psi(x)$ および $\varphi(x)$ がコンパクトな car.(ψ) の上で一様連続なことから $h\to\infty$ なるとき (5·17) は $T_\psi(\varphi)$ に収束する. すなわち

$$\sum_{i=1}^{k_h} c_{hi}\psi(x^{(hi)})\tau_{x^{(hi)}}T_\delta \Longrightarrow T_\psi((\mathfrak{E}_{R^n})') \tag{5·18}$$

である. よって $\mathfrak{L}$ が $(\mathfrak{E}_{R^n})'$ から $(\mathfrak{D}_{R^n})'$ への加法的連続写像で移動と可換ということを用い

$$\sum_{i=1}^{k_h} c_{hi}\psi(x^{(hi)})\tau_{x^{(hi)}}S, \quad \mathfrak{L}(T_\delta)=S \tag{5·19}$$

が $\mathfrak{L}(T_\psi)$ に $(\mathfrak{D}_{R^n})'$ の $\Longrightarrow$ の意味で収束する.

故に (5·19) が $\Longrightarrow T_\psi*S((\mathfrak{D}_{R^n})')$ $(h\to\infty)$ なることがいえれば

$$\mathfrak{L}(T_\psi)=T_\psi*S$$

となる. ところが定理 5·4 の系によって, 任意の $T\in(\mathfrak{E}_{R^n})'$ に対して, 台が

---

1) Δ_{hi} の二点の距離の sup を Δ_{hi} の直径 (diameter) という.

一定のコンパクト集合に入っているような函数列 $\{\varphi_h(x)\}\subseteqq(\mathfrak{D}_{R^n})$ をとって $T_{\varphi_h}\Longrightarrow T((\mathfrak{E}_{R^n})')$ とできるから $\mathfrak{L}$ および $*$ の連続性によって

$$T*S=\lim_{h\to\infty}T_{\varphi_h}*S=\lim_{h\to\infty}\mathfrak{L}(T_{\varphi_h})=\mathfrak{L}(T)$$

$((\mathfrak{D}_{R^n})'$ における収束の意味で)

が成り立つ.（終）

(5·19) が $\Longrightarrow T_\psi * S$ $((\mathfrak{D}_{R^n})')$ の証明 $\varphi\in(\mathfrak{D}_{R^n})$ に対し

$$T_\psi*S(\varphi)=S*T_\psi(\varphi)=S_{(y)}\int_{\mathrm{car.}(\psi)}\psi(x)\varphi(x+y)dy$$

であるが $\int_{R^n}\psi(x)\varphi(x+y)dy$ の Riemann 和

$$\sum_{i=1}^{k_h}c_{hi}\psi(x^{(hi)})\varphi(x^{(hi)}+y) \tag{5·20}$$

が $h\to\infty$ なるとき $\Longrightarrow\int_{\mathrm{car.}(\psi)}\psi(x)\varphi(x+y)dy((\mathfrak{D}_{R^n}))$ なることがわかる. まず $x^{(hi)}$ はいずれもコンパクトな car.(ψ) の点であるから, car.(φ) がコンパクトなことを用い (5·20) は h を動かすとき y の函数として一定のコンパクト集合の外では $\equiv 0$. また

$$D_{(y)}^{(p)}\int_{\mathrm{car.}(\psi)}\psi(x)\varphi(x+y)dy=\int_{\mathrm{car.}(\psi)}\psi(x)D_{(y)}^{(p)}\varphi(x+y)dy \tag{5·21}$$

の Riemann 和

$$\sum_{i=1}^{k_h}c_{hi}\psi(x^{(hi)})D_{(y)}^{(p)}\varphi(x^{(hi)}+y)$$

が y に関して一様に (5·21) に収束することは, $\psi(x)$ および $D_{(y)}^{(p)}\varphi(x+y)$ が $x\in\mathrm{car.}(\psi)$ なるとき (x,y) に関して一様に連続なことからわかる.

かくして $S_{(y)}$ の連続性によって

$$T_\psi*S(\varphi)=\lim_{h\to\infty}\left(\sum_{i=1}^{k_h}c_{hi}\psi(x^{(hi)})S_{(y)}(\varphi(x^{(hi)}+y))\right)$$

がわかった. 右辺の (　　) は

$$(\quad)=\sum_{i=1}^{k_h}c_{hi}\psi(x^{(hi)})(\tau_{x^{(hi)}}S)(\varphi)$$

であるから, (5·19) が $\Longrightarrow T_\psi*S((\mathfrak{D}_{R^n})')$ なることがいえたわけである.

第 6 章　反復ラプラシアンの素解・M. Riesz の一般ポテンシャル

6.1　ラプラシアンの素解

素解の定義　$(\mathfrak{E}_{R^n})$ に属する函数 $\alpha_p(x)$ を係数とする偏微分作用素

$$D=\sum_{|p|\leqq m}\alpha_p(x)D^{(p)},\qquad D^{(p)}=\partial^{p_1+\cdots+p_n}/\partial x_1^{p_1}\cdots\partial x_n^{p_n} \tag{6·1}$$

を考える．

$$DT=T_\delta \tag{6·2}$$

を満足する超函数 T がもし在存すれば T を D の**素解** (elementary solution) という．

ラプラシアンの素解　ラプラシアン (Laplacian)

$$D=\Delta=\Delta_{(x)}=\sum_{i=1}^{n}\partial^2/\partial x_i^2$$

に対しては，$r(x,y)=|x-y|=\left(\sum_{i=1}^{n}(x_i-y_i)^2\right)^{1/2}$ として，(1·17) に示したように

$$\left.\begin{aligned}&\Delta_{(x)}T_{|x|^{2-n}}=(2-n)\Omega_{n-1}T_\delta, &&n\geqq 3 \text{ のとき}\\ &\Delta_{(x)}T_{\log|x|}=2\pi T_\delta, &&n=2 \text{ のとき}\end{aligned}\right\} \tag{6·3}$$

であるから，$\Delta_{(x)}$ の素解として

$$\left.\begin{aligned}&T_{e_n|x|^{2-n}},\ e_n=(2-n)^{-1}\Omega_{n-1}^{-1}, &&n\geqq 3 \text{ のとき}\\ &T_{e_2\log|x|},\ e_2=(2\pi)^{-1}, &&n=2 \text{ のとき}\end{aligned}\right\}$$

をとることができる．

Heaviside の Y 函数　R^1 の函数

$$Y(x)=\begin{cases}0, & x<0 \text{ のとき}\\ 1, & x\geqq 0 \text{ のとき}\end{cases} \tag{6·4}$$

を Heaviside の Y 函数という．これについて

$$\frac{d}{dx}T_Y=T_\delta \tag{6·5}$$

が成り立つ．$\varphi\epsilon(\mathfrak{D}_{R^1})$ の台がコンパクトであるから

$$\left(\frac{d}{dx}T_Y\right)(\varphi)=T_Y\left(-\frac{d\varphi}{dx}\right)=-\int_{-\infty}^{\infty}Y(x)\frac{d\varphi}{dx}dx$$

$$=-\int_0^{\infty}\frac{d\varphi}{dx}dx=-[\varphi(x)]_0^{\infty}=\varphi(0)$$

となるからである．同じく

$$\widetilde{Y}(x)=\int_{-\infty}^{x}Y(x)dx=\begin{cases}0, & x<0 \text{ のとき}\\ x, & x\geqq 0 \text{ のとき}\end{cases} \tag{6·6}$$

と定義すれば $\widetilde{Y}(x)$ が $x\neq 0$ で C^1 で $d\widetilde{Y}/dx=Y(x)$ であるから

$$\frac{d^2}{dx^2}T_{\widetilde{Y}}=\frac{d}{dx}\left(\frac{d}{dx}T_{\widetilde{Y}}\right)=\frac{d}{dx}T_{d\widetilde{Y}/dx}=\frac{d}{dx}T_Y=T_\delta$$

を得る．すなわち $T_{\widetilde{Y}}$ は一次元のラプラシアン d^2/dx^2 の素解になる．

定理 6·1 定数 c_p を係数とする偏微分作用素 $D=\sum_{|p|\leqq m}c_pD^{(p)}$ の素解 E が求められたとすると，任意の $S\epsilon(\mathfrak{E}_{R^n})'$ に対して，$T=E*S$ は

$$DT=S$$

の解になる．

（証明） (5·7) と (5·9) によって

$$D(E*S)=(DE)*S=T_\delta*S=S \qquad \text{(終)}$$

注意 $D=\Delta, S=T_\psi$ $(\psi(x)\epsilon(\mathfrak{D}_{R^n}), n\geqq 3)$ とすれば

$$E=E_{(x)}=T_{e_n|x|^{2-n}},\qquad S=S_{(x)}=T_{\psi(x)}$$

であるから，(5·4) によって

$$(E*S)_{(x)}=T_{e_nr^{2-n}}*\psi(x),$$

$$e_nr^{2-n}*\psi(x)=\int_{R^n}e_nr^{2-n}(0,x-y)\psi(y)dy=\int_{R^n}e_nr^{2-n}(x,y)\psi(y)dy,$$

したがって $\Delta(E*S)=T_\psi$ は

$$e_n\int_{R^n}\left[\int_{R^n}r^{2-n}(x,y)\psi(y)dy\right]\Delta\varphi(x)dx=\int\psi(x)\varphi(x)dx,\quad \varphi\epsilon(\mathfrak{D}_{R^n})$$

と同等であるが，これは古典的な Poisson の定理と符合する：

定理 6·2 $n\geqq 3$ とする，$f(x)$ が C^1 かつコンパクトな台をもっているとすれば

$$u(x)=\int_{R^n} e_n r^{2-n}(x,y)f(y)dy \in C^2 \text{ かつ } \Delta u(x)=f(x) \qquad (6\cdot 7)$$

（証明）　car.(φ) がコンパクトなことを用い，Green 積分公式と $u(x)\in C^2$ とから

$$\int_{R^n}\left[e_n\int_{R^n} r^{2-n}(x,y)f(y)dy\right]\Delta_{(x)}\varphi(x)\,dx$$

$$=\int_{R^n}\left\{\Delta_{(x)}\left[e_n\int_{R^n} r^{2-n}(x,y)f(y)dy\right]\right\}\varphi(x)\,dx$$

を得るが，$\Delta u(x)=f(x)$ によって右辺は $\int_{R^n} f(x)\varphi(x)dx$ に等しいからである．（終）

ここで念のために (6·7) を証明しておく．$r(x,y)=|x-y|$ について

$$\partial|y-x|/\partial x_i=(x_i-y_i)/|y-x|$$

であるから

$$\partial u(x)/\partial x_i=(2-n)e_n\int_{R^n} f(y)|y-x|^{-n}(x_i-y_i)dy$$

したがって $(2-n)e_n=\Omega_{n-1}^{-1}$ によって

$$\Delta_{(x)}u(x)=-\Omega_{n-1}^{-1}\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}\int_{R^n} f(y)(y_i-x_i)|y-x|^{-n}dy$$

$$=-\Omega_{n-1}^{-1}\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}\int_{R^n} f(y+x)y_i|y|^{-n}dy$$

$$=-\Omega_{n-1}^{-1}\sum_{i=1}^{n}\int_{R^n} f_{y_i}(y+x)y_i|y|^{-n}dy$$

ところが car.(f) がコンパクトだから，部分積分で[1)]

$$\int_{|y|>\varepsilon} f_{y_i}(y+x)y_i|y|^{-n}dy=-\int_{|y|=\varepsilon} f(y+x)y_i|y|^{-n}\frac{y_i}{|y|}dS_y$$

$$-\int_{|y|>\varepsilon} f(y+x)\frac{\partial}{\partial y_i}(y_i|y|^{-n})dy$$

$$=-\int_{|y|=\varepsilon} f(y+x)|y|^{-n-1}y_i^2 dS_y$$

1)　dS_y は $|y|=\varepsilon$ の上の超曲面要素，したがって $\varepsilon^{n-1}d\Omega_{n-1}$ に等しい．

$$-\int_{|y|>\varepsilon} f(y+x)\{|y|^{-n}-n|y|^{-n-2}y_i^2\}dy$$

となるから

$$\Delta_{(x)}u(x)=\Omega_{n-1}^{-1}\lim_{\varepsilon\downarrow 0}\left\{\varepsilon^{1-n}\int_{|y|=\varepsilon} f(y+x)\varepsilon^{n-1}d\Omega_{n-1}\right.$$
$$\left.+\int_{|y|>\varepsilon} f(y+x)\,\{n|y|^{-n}-n|y|^{-n}\}dy\right\}$$
$$=f(x).$$

かくして $\Delta u(x)=f(x)$ の解 $u(x)$ が，パラメター $y=(y_1,\cdots,y_n)$ を含む

$$e_n r^{2-n}(y,x)=\frac{1}{(2-n)\Omega_{n-1}}|y-x|^{2-n}=e_n r^{2-n}(x-y,0)$$

の一次結合の極限

$$e_n r^{2-n}*f(x)=\int_{R^n} e_n r^{2-n}(x-y,0)f(y)dy$$

として表わされることがわかった．かく $e_n r^{2-n}(x-y,0)$ が $\Delta u(x)=f(x)$ の**解の構成要素** (element) になるというのが，Poisson の定理 6·2 の意味するところなのであって，素解なる概念のおこりはこのようなところにあるのである．

6.2 M. Riesz の一般ポテンシャル・反復ラプラシアンの素解

ラプラシアン Δ の素解，すなわち

$$T_{\tilde{Y}(x)}\ (n=1),\quad T_{e_2\log|x|}\ (n=2),\quad T_{e_n|x|^{2-n}}\ (n\geqq 3)$$

に示唆されて，次のような**一般ポテンシャル** (generalized potential) を考える．すなわち λ を複素数として

$$\int_0^\infty x^\lambda\varphi(x)dx \qquad (n=1),$$

$$\int_{R^n}|x|^\lambda\log|x|\cdot\varphi(x)dx \quad (n=\text{偶数}),$$

$$\int_{R^n}|x|^\lambda\varphi(x)dx \qquad (n=\text{奇数}).$$

によって与えられるような超函数を考えようというのである，これらに適当な

定数 ($\neq 0$) を乗ずれば，それぞれ

$$\lambda=k-1 \quad (n=1 \text{ のとき})$$

$$\lambda=2k-n \quad (n \geqq 2 \text{ のとき})$$

のときに**反復ラプラシアン** (iterated Laplacian) $\Delta^k=\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2}{\partial x_i^2}\right)^k$ の素解になることを証明することができる．このように複素パラメター λ を導入することは M,Riesz の着想[1]によるのである[2],

R^1 における一般ポテンシャル 複素数 λ の実数部分 $\Re(\lambda)>-1$ ならば

$$D_\lambda(\varphi)=\int_0^\infty x^\lambda\varphi(x)dx \tag{6·8}$$

$$E_\lambda(\varphi)=\int_0^\infty x^\lambda \log x\cdot\varphi(x)dx \tag{6·9}$$

によって $(\mathfrak{D}_{R^1})$ の上の超函数 D_λ, E_λ が定義される．

$\Re(\lambda)>0$ ならば部分積分で

$$D_{\lambda-1}(\varphi)=\left[\frac{1}{\lambda}x^\lambda\varphi(x)\right]_0^\infty-\frac{1}{\lambda}\int_0^\infty x^\lambda\frac{d\varphi}{dx}dx=\frac{1}{\lambda}\frac{d}{dx}D_\lambda(\varphi)$$

すなわち

$$D_{\lambda-1}=\frac{1}{\lambda}\frac{d}{dx}D_\lambda$$

を得るから

$$\bar{D}_\lambda=\frac{1}{\Gamma(\lambda+1)}D_\lambda \tag{6·10}$$

とおくと，よく知られた公式

$$\Gamma(\lambda+1)=\lambda\Gamma(\lambda) \tag{6·11}$$

によって

$$\frac{d}{dx}\bar{D}_\lambda=\bar{D}_{\lambda-1} \tag{6·12}$$

---

1) L'intégrale de Riemann–Liouville et le problème de Cauchy. Acta Mathematica, 81 (1948)

2) 以下本§の叙述は C. Chevalley の講義ノート：Theory of distributions, Columbia University (1950) に負うところが多い．

を得る.

この公式は $\Re(\lambda)>0$ なる条件のもとに得られたのであったが，任意の λ に対して正の整数 m を十分大きくとって，$\Re(\lambda+m)>0$ ならしめると $\bar{D}_{\lambda+m}$ は定義されている．超函数であるからこれは何回でも微分ができる．しかも (6·12) があるから，$\Re(\lambda)>-1$ ならば

$$\frac{d^m}{dx^m}\bar{D}_{\lambda+m}=\bar{D}_\lambda \qquad (6\cdot13)$$

が成り立つ．だからこの公式によって，すべての複素数 λ に対して $\bar{D}_\lambda$ が定義されるわけである．$\Re(\lambda)>-1$ でないと (6·8) は収束しないが，公式(6·12) を利用して解析接続の考えによって $\bar{D}_\lambda$ が定義されるのであり，この解析接続という巧妙な着想は M. Riesz によるものなのである．かくして

$$\bar{D}_\lambda(\varphi)=\frac{(-1)^m}{\Gamma(\lambda+m+1)}\int_0^\infty x^{\lambda+m}\frac{d^m\varphi}{dx^m}dx \qquad (6\cdot13)'$$

だから $\bar{D}_\lambda(\varphi)$ が λ について正則なことがわかった．かつまた

$$\bar{D}_{-1}=T_\delta \qquad (6\cdot14)$$

であることは

$$\bar{D}_{-1}(\varphi)=\left(\frac{d}{dx}D_0\right)(\varphi)=(-1)\frac{1}{\Gamma(1)}\int_0^\infty\frac{d\varphi}{dx}dx=\varphi(0)$$

からわかる．

上と同じく $\Re(\lambda)>0$ なるとき

$$E_{\lambda-1}(\varphi)=\left[\frac{1}{\lambda}x^\lambda\log x\cdot\varphi(x)\right]_0^\infty-\frac{1}{\lambda}\int_0^\infty x^\lambda\frac{d}{dx}(\log x\cdot\varphi(x))dx$$
$$=-\frac{1}{\lambda}\int_0^\infty x^{\lambda-1}\varphi(x)dx-\frac{1}{\lambda}\int_0^\infty x^\lambda\log x\cdot\frac{d\varphi}{dx}dx$$

から

$$E_{\lambda-1}=-\frac{1}{\lambda}D_{\lambda-1}+\frac{1}{\lambda}\frac{d}{dx}E_\lambda \qquad (6\cdot15)$$

が得られて

$$\frac{1}{\Gamma(\lambda)}E_{\lambda-1}=-\frac{1}{\lambda}\bar{D}_{\lambda-1}+\frac{1}{\Gamma(\lambda+1)}\frac{d}{dx}E_\lambda$$

したがって (6·10) と (6·11) とによって

$$\bar{E}_\lambda = \frac{1}{\Gamma(\lambda+1)^2} E_\lambda, \tag{6·16}$$

$$\bar{E}_{\lambda-1} = -\frac{1}{\Gamma(\lambda+1)} \bar{D}_{\lambda-1} + \lambda \frac{d}{dx} \bar{E}_\lambda \tag{6·17}$$

かくして $\bar{D}_\lambda$ の場合と同じく，すべての複素数 λ に対して $\bar{E}_\lambda$ が定義せられ，かつ $\bar{E}_\lambda(\varphi)$ が λ について正則なことがわかった．しかも (6·17) において $\lambda=0$ とおき，$\Gamma(1)=1$ と (6·7) を使えば

$$\bar{E}_{-1} = -T_\delta \tag{6·18}$$

の成り立つことがわかる．

R^n における一般ポテンシャル　複素数 λ の実数部分 $\Re(\lambda)>2-n$ ならば，$r=|x|=\left(\sum_{i=1}^n x_i^2\right)^{1/2}$ として超函数

$$R_\lambda(\varphi) = \int_{R^n} r^\lambda \varphi(x)dx \tag{6·19}$$

$$S_\lambda(\varphi) = \int_{R^n} r^\lambda \log r \cdot \varphi(x)dx \tag{6·20}$$

が定義される．$x=0$ を中心とする極座標で

$$dx = r^{n-1}dr \cdot d\Omega_{n-1}$$

であるからである．R^n の原点を中心とする半径1の球面 $\{t\,;\,|t|=1\}$ 上の平均

$$M_\varphi(r) = \frac{1}{\Omega_{n-1}} \int_{|t|=1} \varphi(r\cdot t)d\Omega_{n-1}, \qquad r\cdot t = (rt_1, \cdots, rt_n) \tag{6·21}$$

を導入すると

$$\left.\begin{aligned} R_\lambda(\varphi) &= \Omega_{n-1}\int_0^\infty r^{\lambda+n-1} M_\varphi(r)dr = \Omega_{n-1} D_{\lambda+n-1}(M_\varphi), \\ S_\lambda(\varphi) &= \Omega_{n-1}\int_0^\infty r^{\lambda+n-1} \log r \cdot M_\varphi(r)dr = \Omega_{n-1} E_{\lambda+n-1}(M_\varphi) \end{aligned}\right\} \tag{6·22}$$

となるから，

$$\bar{R}_\lambda(\varphi) = \frac{1}{\Gamma(\lambda+n)} R_\lambda(\varphi) \tag{6·23}$$

$$\bar{S}_\lambda(\varphi)=\frac{1}{\Gamma(\lambda+n)^2}S_\lambda(\varphi) \tag{6·24}$$

がすべての複素数 λ に対して定義せられ，$\bar{R}_\lambda(\varphi), \bar{S}_\lambda(\varphi)$ が λ について正則なことが $\bar{D}_\lambda, \bar{E}_\lambda$ について上に述べたことからわかる[1]．また $\Gamma(0)=1$ だから (6·14),(6·22)，と(6·18) によって

$$\bar{R}_{-n}(\varphi)=R_{-n}(\varphi)=\Omega_{n-1}D_{-1}(M_\varphi)=\Omega_{n-1}M_\varphi(0)=\Omega_{n-1}\varphi(0),$$

$$\bar{S}_{-n}(\varphi)=S_{-n}(\varphi)=\Omega_{n-1}E_{-1}(M_\varphi)=-\Omega_{n-1}M_\varphi(0)=-\Omega_{n-1}\varphi(0)$$

すなわち

$$\bar{R}_{-n}=\Omega_{+n-1}T_\delta, \tag{6·25}$$

$$\bar{S}_{-n}=-\Omega_{n-1}T_\delta \tag{6·26}$$

を得る．次の定理は基本的である．

定理 6·3 定数 $B_{k,n}$ と定数 $A_{k,n}$ で

$$\Delta_{(x)}^k T_{B_{k,n}|x|^{2k-n}}=T_\delta \quad (n \text{ が奇数で } 2k-n\geqq 0 \text{ のとき}), \tag{6·27}$$

$$\Delta_{(x)}^k T_{A_{k,n}|x|^{2k-n}\log|x|}=T_\delta \quad (n \text{ が偶数で } 2k-n\geqq 0 \text{ のとき}) \tag{6·28}$$

を満足するものが存在する．**[反復ラプラシアンの素解]**

（証明） 第一段：

$$\Delta r^\lambda=\lambda(\lambda+n-2)r^{\lambda-2}, \tag{6·29}$$

$$\Delta r^\lambda\log r=\lambda(\lambda+n-2)r^{\lambda-2}\log r+(2\lambda+n-2)r^{\lambda-2} \tag{6·30}$$

を証明する．実際，$\dfrac{\partial r}{\partial x_i}=\dfrac{x_i}{r}$ によって

$$\frac{\partial r^\lambda}{\partial x_i}=\lambda r^{\lambda-1}\frac{x_i}{r},$$

$$\frac{\partial^2 r^\lambda}{\partial x_i}=\lambda(\lambda-1)r^{\lambda-2}\left(\frac{x_i}{r}\right)^2+\lambda r^{\lambda-1}\left(\frac{1}{r}-\frac{x_i^2}{r^3}\right).$$

したがって

$$\Delta r^\lambda=\lambda(\lambda-1)r^{\lambda-2}+\lambda(n-1)r^{\lambda-2}=\lambda(\lambda+n-2)r^{\lambda-2}$$

---

1) $M_\varphi(r)$ が $r\geqq 0$ で C^∞ でかつコンパクトな台をもつことは

$$\frac{d^kM_\varphi(r)}{dr^k}=\frac{1}{\Omega_{n-1}}\int_{|t|=1}\frac{\partial^k\varphi(r\cdot t)}{\partial r^k}dt$$

からわかるから，$\bar{D}_\lambda(M_\varphi), \bar{E}_\lambda(M_\varphi)$ が定義されるのである．

を得る．また同じく

$$\frac{\partial^2}{\partial x_i}(\log r\cdot r^\lambda)=\log r\cdot\frac{\partial^2 r^\lambda}{\partial x_i^2}+2\frac{1}{r}\frac{x_i}{r}\frac{\partial r^\lambda}{\partial x_i}+\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{1}{r}\frac{x_i}{r}\right)\cdot r^\lambda$$

$$=\log r\left\{\lambda(\lambda-1)r^{\lambda-2}\left(\frac{x_i}{r}\right)^2+\lambda r^{\lambda-1}\left(\frac{1}{r}-\frac{x_i^2}{r^3}\right)\right\}$$

$$+2\lambda r^{\lambda-2}\left(\frac{x_i}{r}\right)^2+\left\{-\frac{1}{r^2}\left(\frac{x_i}{r}\right)^2+\frac{1}{r}\left(\frac{1}{r}-\frac{x_i^2}{r^3}\right)\right\}r^\lambda$$

から

$$\Delta r^\lambda\log r=\lambda(\lambda+n-2)r^{\lambda-2}\log r+r^{\lambda-2}(2\lambda-1+n-1)$$

を得る．

第二段：(6·29) から

$$\Delta R_\lambda=\lambda(\lambda+n-2)R_{\lambda-2}. \tag{6·31}$$

したがって (6·11) と (6·23) を用い

$$\Delta\bar{R}_\lambda=\frac{\lambda}{\lambda+n-1}\bar{R}_{\lambda-2}$$

故に

$$\Delta^k\bar{R}_\lambda=\frac{\lambda(\lambda-2)(\lambda-4)\cdots(\lambda-2k+2)}{(\lambda+n-1)(\lambda+n-3)\cdots(\lambda+n-2k+1)}\bar{R}_{\lambda-2k}$$

よって n が奇数ならば $\lambda=2k-n$ としたとき，(6·25) によって

$$\Delta^k\bar{R}_{2k-n}=\frac{(2k-n)(2k-n-2)\cdots(2-n)}{(2k-1)(2k-3)\cdots1}\Omega_{n-1}T_\delta \tag{6·32}$$

第三段：(6·28) を証明する．(6·30) から

$$\Delta S_\lambda=\lambda(\lambda+n-2)S_{\lambda-2}+(2\lambda+n-2)R_{\lambda-2} \tag{6·33}$$

定数 c_λ をもって

$$T_\lambda=S_\lambda+c_\lambda R_\lambda \tag{6·34}$$

をつくり，

$$\Delta T_\lambda=\lambda(\lambda+n-2)T_{\lambda-2} \tag{6·35}$$

が成り立つようにする．そのためには (6·31) と (6·33) で

$$\Delta T_\lambda=\Delta S_\lambda+c_\lambda\Delta R_\lambda$$

$$=\lambda(\lambda+n-2)S_{\lambda-2}+(2\lambda+n-2)R_{\lambda-2}+c_\lambda\cdot\lambda(\lambda+n-2)R_{\lambda-2}$$

を得るから，これを (6・34) から得られる

$$\Delta T_\lambda=\lambda(\lambda+n-2)T_{\lambda-2}=\lambda(\lambda+n-2)\{S_{\lambda-2}+c_{\lambda-2}R_{\lambda-2}\}$$

と比較し，c_λ を

$$c_{\lambda-2}=c_\lambda+\frac{1}{\lambda}+\frac{1}{\lambda+n-2} \tag{6・36}$$

から定めるとよい．

(6・35) から

$$\Delta^k T_\lambda=\lambda(\lambda-2)\cdots(\lambda-2k+2)\cdot(\lambda+n-2)(\lambda+n-4)\cdots(\lambda+n-2k)T_{\lambda-2k}$$
$$=f(\lambda,k,n)T_{\lambda-2k} \tag{6・37}$$

を得る．

いま n を偶数で $2k-n\geqq 0$ とする．もし

$$2k-n\leqq\lambda<2k-n+2 \text{ なる } \lambda \text{ に対して } c_\lambda=0 \tag{6・38}$$

とすると，(6・36) から．このような λ に対しては

$$c_{\lambda-2k}=\frac{1}{\lambda}+\frac{1}{\lambda-2}+\cdots+\frac{1}{\lambda-2k+2}+\frac{1}{\lambda+n-2}$$
$$+\cdots+\frac{1}{\lambda+n-2k} \tag{6・39}$$

である．ところで $f(\lambda,k,n)=0$ は $\lambda=2k-n$ をちょうど二重根とするから

$$f(\lambda,k,n)=(\lambda+n-2k)^2P(\lambda),\quad P(2k-n)\neq 0 \tag{6・40}$$

(6・38) によって

$$2k-n\leqq\lambda<2k-n+2 \quad \text{ならば} \quad T_\lambda=S_\lambda$$

したがって (6・37) から，このような λ に対しては

$$\Delta^k S_\lambda=P(\lambda)(\lambda+n-2k)^2S_{\lambda-2k}+c_{\lambda-2k}P(\lambda)(\lambda+n-2k)^2R_{\lambda-2k}$$
$$=P(\lambda)(\lambda+n-2k)^2\Gamma(\lambda+n-2k)^2\bar{S}_{\lambda-2k}$$
$$+P(\lambda)(\lambda+n-2k)\Gamma(\lambda+n-2k)(\lambda+n-2k)c_{\lambda-2k}\bar{R}_{\lambda-2k}$$

の成り立つことがわかった．ところが公式 (6・11) と $\Gamma(1)=1$ とによって

$$\lim_{\lambda\downarrow 2k-n}(\lambda+n-2k)\Gamma(\lambda+n-2k)=1$$

また，(6・39) と (6・40) とから

$$\lim_{\lambda\downarrow 2k-n}(\lambda+n-2k)c_{\lambda-2k}=2$$

よって (6·25) と (6·26) とからわかるように，$(\Delta^k S_\lambda)(\varphi)$ の右辺は λ について解析函数であって，かつ $\lambda\downarrow(2k-n)$ なるとき

$$P(2k-n)(-\Omega_{n-1}\varphi(0)+2\Omega_{n-1}\varphi(0))=P(2k-n)\Omega_{n-1}\varphi(0)$$

に収束する．一方において (6·22) から

$$(\Delta^k S_\lambda)(\varphi)=S_\lambda(\Delta^k\varphi)=\Omega_{n-1}\int_0^\infty r^{\lambda+n-1}\log r\cdot M_{\Delta^k\varphi}(r)dr$$

は，n が偶数で $\neq 0, 2k-n\geqq 0$ なることから λ が $2k-n$ に十分近い所では λ の連続函数である．故に結局

$$\Delta^k S_{2k-n}=\Omega_{n-1}P(2k-n)T_\delta$$

が得られた．（終）

6·3 発散積分の有限部分

$\Re(\lambda)<-1$ ならば

$$\int_0^\infty x^\lambda\varphi(x)dx,\qquad \varphi\in(\mathfrak{D}_{R^1})$$

は一般には発散するから，この積分によって $D_\lambda(\varphi)$ を定義することはできない．λ が負の整数でないとし，$\Re(\lambda+k)>0$ となるような正整数 k をとると，部分積分で $\varepsilon>0$ なるとき

$$\int_\varepsilon^\infty x^\lambda\varphi(x)dx=\left[\frac{1}{\lambda+1}x^{\lambda+1}\varphi(x)\right]_\varepsilon^\infty-\frac{1}{\lambda+1}\int_\varepsilon^\infty x^{\lambda+1}\frac{d\varphi}{dx}dx$$

$$=\left\{\frac{-1}{\lambda+1}\varepsilon^{\lambda+1}\varphi(\varepsilon)+\frac{1}{(\lambda+1)(\lambda+2)}\varepsilon^{\lambda+2}\frac{d\varphi(\varepsilon)}{d\varepsilon}\right.$$

$$\left.+\cdots+(-1)^k\frac{1}{(\lambda+1)(\lambda+2)\cdots(\lambda+k)}\varepsilon^{\lambda+k}\frac{d^{k-1}\varphi(\varepsilon)}{d\varepsilon}\right\}$$

$$+(-1)^k\frac{1}{(\lambda+1)(\lambda+2)\cdots(\lambda+k)}\int_\varepsilon^\infty x^{\lambda+k}\frac{d^k\varphi}{dx^k}dx$$

$\Re(\lambda+k)>0$ であるから右辺の積分は $\varepsilon\downarrow 0$ なるとき収束する．すなわち $\varepsilon\downarrow 0$ なるとき発散する左辺の積分は，

$$\text{発散部分}\{\quad\}+\text{有限部分}\ (-1)^k\frac{1}{(\lambda+1)(\lambda+2)\cdots(\lambda+k)}$$
$$\times\int_0^\infty x^{\lambda+k}\frac{d^k\varphi}{dx^k}dx$$

と表わされた．これがすなわち前 § において

$$\bar{D}_\lambda=\frac{d^k}{dx^k}\bar{D}_{\lambda+k},\qquad \bar{D}_{\lambda+k}=\frac{1}{\Gamma(\lambda+k+1)}D_{\lambda+k}$$

によって，すべての複素数 λ に対して定義されたことと符合するのである．公式

$$\Gamma(\lambda+k+1)=(\lambda+k)\Gamma(\lambda+k)=(\lambda+k)(\lambda+k-1)\Gamma(\lambda+k-1)=\cdots$$
$$=(\lambda+k)(\lambda+k-1)\cdots(\lambda+1)\Gamma(\lambda+1)$$

が成り立つからである．

Hadamard が[1]双曲形偏微分方程式の積分の理論において

$$Q(\varepsilon)=\int_a^{b-\varepsilon}(b-x)^{-(3/2+\nu)}A(x)dx,\quad \nu=0,1,2,\cdots\ (\varepsilon>0)$$

の形の発散積分を処理する必要に直面して，$A(x)$ を Taylor 展開して $(0<\vartheta(x)<1)$,

$$Q(\varepsilon)=\frac{A(b)}{1/2+\nu}\{\varepsilon^{-(1/2+\nu)}-(b-a)^{-(1/2+\nu)}\}$$
$$-\frac{A'(b)}{1!(1/2+\nu)}\{\varepsilon^{-(-1/2+\nu)}-(b-a)^{-(-1/2+\nu)}\}$$
$$+\cdots$$
$$+\frac{(-1)^\nu A^{(\nu)}(b)}{\nu!(1/2)}\{\varepsilon^{-1/2}-(b-a)^{-1/2}\}$$
$$+\frac{(-1)^{\nu+1}}{(\nu+1)!}\int_a^{b-\varepsilon}(b-x)^{-1/2}A^{(\nu+1)}(b-\vartheta(x)(b-x))dx$$

と書き直して，$\varepsilon\downarrow 0$ なるときの $Q(\varepsilon)$ の有限部分

$$\lim_{\varepsilon\downarrow 0}\left\{Q(\varepsilon)-\varepsilon^{-(1/2+\nu)}\left[\frac{A(b)}{1/2+\nu}+\frac{(-1)A'(b)}{1!(-1/2+\nu)}\varepsilon\right.\right.$$

1) Le problème de Cauchy, Paris (1932)

$$+\cdots+\frac{(-1)^{\nu}A^{(\nu)}(b)}{\nu!(1/2)}\varepsilon^{\nu}\Big]\Big\}$$

$$=-(b-a)^{-(1/2+\nu)}\left\{\frac{A(b)}{1/2+\nu}+\frac{A'(b)}{1!(-1/2+\nu)}(b-a)\right.$$

$$\left.+\cdots+\frac{(-1)^{\nu}A^{(\nu)}(b)}{\nu!(1/2)}(b-a)^{\nu}\right\}$$

$$+\int_a^b (b-x)^{-(3/2+\nu)}(-1)^{\nu+1}\frac{(b-x)^{\nu+1}}{(\nu+1)!}A^{(\nu+1)}(b-\vartheta(b-x))dx$$

を求めたのであった．

これは超函数的にいうと

$$f(x)=\begin{cases}(b-x)^{-1/2}, & a\leqq x<b \text{ のとき}\\ 0, & x>b \text{ または } x<a \text{ のとき}\end{cases}$$

による超函数 T_f を考え，$\dfrac{d^{\nu+1}}{dx^{\nu+1}}T_f$ を考えるときに $Q(\varepsilon)$ の形の発散積分が表われてくることに対応する．M. Riesz のように，複素パラメター λ を含む一般ポテンシャル

$$\int_a^b (b-x)^{\lambda}\varphi(x)dx, \qquad \varphi\in(\mathfrak{D}_{R^1})$$

を考えると，前 § と同じように，以上の議論が，λ に関する函数論的考察と結びついて円滑に運ぶのである．

M. Riesz はなおダランベルシァン (d'Alembertian)

$$\nabla=\frac{\partial^2}{\partial t^2}-\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2}{\partial x_i^2} \tag{6·41}$$

に対し，Lorentz の距離から定義される

$$\left.\begin{aligned} s&=\left(t^2-\sum_{i=1}^{n}x_i^2\right)^{1/2}, \quad t>0 \text{ かつ } t^2>\sum_{i=1}^{n}x_i^2 \text{ のとき}\\ &=0, \qquad\qquad \text{それ以外のとき}\end{aligned}\right\} \tag{6·42}$$

による一般ポテンシャル

$$Z_{\alpha}(\varphi)=\frac{1}{2^{\alpha}\Gamma\left(\dfrac{1+\alpha}{2}\right)\Gamma\left(\dfrac{\alpha+n+1}{2}\right)}\int_{R^1\times R^n} s^{\alpha}\varphi(t,x)dtdx,$$

$$\varphi(t, x) \in (\mathfrak{D}_{R^1 \times R^n}) \tag{6·43}$$

を考えた．このようにし適当な定数 c_n をとると $c_n Z_{-n+1}$ が Δ の素解になる：

$$\nabla(c_n Z_{-n+1}) = T_\delta \tag{6·44}$$

ことを証明して，前記 Hadamard の双曲形方程式に関する研究の函数論的意義を明らかならしめたのである．これらに興味をもたれる読者は Riesz の前掲論文または Chevalley の前掲講義ノートをみられたい[1]．

1）筆者：微分方程式の解法，岩波全書（1954），p. 243～にその筋道の紹介がある．また G. F. D. Duff ; Partial Differential Equations, Toronto (1956), Chap. X を参照

第 7 章　高階偏微分が局所可積分函数であるような超函数

7.1　反復ラプラシアンのパラメトリックス

パラメトリックスの定義　$(\mathfrak{E}_{R^n})$ に属する函数 $\alpha_p(x)$ を係数とする偏微分作用素

$$D=\sum_{|p|\leqq m}\alpha_p(x)D^{(p)} \tag{7·1}$$

に対して，適当に $f(x)\epsilon(\mathfrak{E}_{R^n})$ をとるとき

$$DT=T_\delta+T_f \tag{7·2}$$

を満足するような超函数 T がもし存在すれば，T を D のパラメトリックス (parametrix) という．

反復ラプラシアン Δ^k のパラメトリックス　$g(x)\epsilon(\mathfrak{D}_{R^n})$ を $x=0$ の十分小さい近傍 $U(0)$ において1に等しい函数とする．Δ^k の素解

$T_{e_{k,n}}(x)$，ただし

$$e_{k,n}(x)=\begin{cases}B_{k,n}|x|^{2k-n} & (n \text{ 奇数で } 2k-n\geqq 0 \text{ のとき})\\ A_{k,n}|x|^{2k-n}\log|x| & (n \text{ 偶数で } 2k-n\geqq 0 \text{ のとき})\end{cases} \tag{7·3}$$

に対して

$$T_{g(x)e_{k,n}(x)} \tag{7·4}$$

は Δ^k のパラメトリックスになる．しかも $\Delta^k T_{g(x)e_{k,n}(x)}=T_\delta+T_f$ における C^∞ 函数 $f(x)$ の台は $g(x)$ の台に含まれるようにできる．

（証明）$\varphi(x)\epsilon(\mathfrak{D}_{R^n})$ の台が $U(0)$ に含まれるとすれば，car.$(\Delta^k\varphi)$ も $U(0)$ に含まれる．よって $U(0)$ で $g(x)=1$ を用い

$$(\Delta^k T_{ge_{k,n}})(\varphi)=\int_{R^n}g(x)e_{k,n}(x)\Delta^k\varphi(x)dx=\int_{U(0)}e_{k,n}(x)\Delta^k\varphi(x)dx$$
$$=(\Delta^k T_{e_{k,n}})(\varphi)=T_\delta(\varphi)=\varphi(0)$$

また $\varphi(x)\epsilon(\mathfrak{D}_{R^n})$ の台が $x=0$ を含まないとすれば，car.(φ) で $g(x)e_{k,n}(x)$ は C^∞．したがって car.(φ) がコンパクトなことを用い，部分積分を繰返し

$$(\Delta^k T_{ge_{k,n}})(\varphi)=\int_{R^n} g(x)e_{k,n}(x)\Delta^k\varphi(x)dx$$

$$=\int_{\mathrm{car.}(\varphi)} g(x)e_{k,n}(x)\Delta^k\varphi(x)dx$$

$$=\int_{\mathrm{car.}(\varphi)} \Delta^k(g(x)e_{k,n}(x))\cdot\varphi(x)dx$$

$\varphi(0)=0$ であるから，これは

$$=T_{\Delta^k(ge_{k,n})}(\varphi)+T_\delta(\varphi)$$

故に

$$f(x)=\begin{cases} 0, & x=0 \text{ の十分小さい近傍において} \\ \Delta^k(g(x)e_{k,n}(x)), & x\neq 0 \text{ なる } x \text{ において} \end{cases} \tag{7·5}$$

とおけば，$f(x)\in C^\infty$ かつ car.(f) は $\subseteqq$car.(g) でコンパクト，すなわち $f\in(\mathfrak{D}_{R^n})$ で

$$\Delta^k T_{ge_{k,n}}=T_\delta+T_f \tag{7·6}$$

が成り立つ．

注 同じくラプラシアン Δ のパラメトリックスが次の形に与えられる：

$$\left.\begin{array}{ll} T_{e_n g(x)|x|^{2-n}}, & n\geqq 3 \text{ のとき} \\ T_{e_2 g(x)\log|x|}, & n=2 \text{ のとき} \end{array}\right\}$$

パラメトリックスの意義 上には Δ^k の素解を修正して Δ^k のパラメトリックスをつくったのであるが，一般の偏微分作用素 D については，そもそも素解を求めることが困難である．しかし定義 (7·2) における $f(x)\in(\mathfrak{D}_{R^n})$ が自由にとれることから，D のパラメトリックスを求めることは素解をもとめることよりも容易な場合が多い．しかも次 § 以下で示してゆくように，目的によってはパラメトリックスを素解の代用に使ってもいろいろな議論をし得ることが多いのである．そしてまたパラメトリックスを利用して素解を求め得る場合もあるのである．この意味で標語的に

パラメトリックス ＝ 殆んど素解

ということができるわけであって，E. E. Levi[1] と D. Hilbert によって導入

1) Sulle equazione lineari totalemente ellitiche alle derivati parziali, Rendiconti Circolo Mat. di Palermo, 24 (1907), 275–317.

されたこのパラメトリックスなる概念は偏微分方程式の研究において最も基本的な概念の一つなのである.

7.2　$\Delta^k T$ が局所可積分な函数であるような超函数 T の正則性

まず定義を与える.

定義　超函数 $S\in(\mathfrak{D}_{R^n})'$ が R^n の開集合 U において函数 $\psi(x)$ に等しいというのは,

$$\mathrm{car.}(\varphi)\subset U \text{ ならばつねに } S(\varphi)=\int_U \psi(x)\varphi(x)dx \tag{7·7}$$

の成り立つことと定義する.

いままで $T=T_f$ と書いたのは超函数 T が R^n において局所可積分函数 $f(x)$ に等しいということに他ならなかったわけである. 次の定理は, 超函数の考えを偏微分方程式論に応用する上において基本的な役割りを演ずる.

定理 7·1　$2k-n\geqq 0$ とする. $T\in(\mathfrak{D}_{R^n})'$ とし, $\Delta^k T$ が開集合 $U\subseteqq R^n$ において局所可積分函数 $\psi(x)$ に等しいならば, T は U において m 回連続偏微分可能な函数に等しい. ただし

$$2k-n\geqq 2m \tag{7·8}$$

（証明）Δ^k のパラメトリックス $T_{gek,n}$ と T との畳み込み $T_{gek,n}*T$ について, (5·9), (7·6) および (5·7) によって

$$\Delta^k(T_{gek,n}*T)=(\Delta^k T_{gek,n})*T=(T_\delta+T_f)*T=T_\delta*T+T_f*T$$
$$=T+T_f*T,\qquad f\in(\mathfrak{D}_{R^n})$$
$$\Delta^k(T_{gek,n}*T)=T_{gek,n}*(\Delta^k T)$$

故に

$$T=T_{gek,n}*(\Delta^k T)-T_f*T.$$

右辺第二項は T の正則化として, R^n において C^∞ である. よって右辺第一項が U において C^m に属する函数に等しいことがいえるとよい. これを証明するために, $\mathrm{car.}(\varphi)\subseteqq U$ であるような任意の $\varphi\in(\mathfrak{D}_{R^n})$ をとる. $\mathrm{car.}(\varphi)$ は

1) Grundzüge einer allgemeinen Theorie der linearen Integralgleichungen., Göttinger Nachrichten (1910), 1–65.

コンパクトでこれを含む U は開集合であるから，開集合 U_1, U_2 とコンパクト集合 K とをとり

$$\text{car.}(\varphi) \subseteqq \bar{U}_1 \subseteqq U_2 \subseteqq K \subseteqq U \tag{7·9}$$

とできる．$\alpha(x) \in (\mathfrak{D}_{R^n})$ を

$$U_1 \text{ において } \alpha(x) = 1, \quad \text{car.}(\alpha) \subseteqq K \tag{7·10}$$

なるようにとる．このような $\alpha(x)$ の存在することは定理 2·10 の証明の中においてと同様にしてできる．

$$\begin{aligned}(T_{ge_{k,n}} * \Delta^k T)(\varphi) &= (\Delta^k T)_{(x)} \int_{R^n} g(y) e_{k,n}(y) \varphi(x+y) dy \\ &= (\Delta^k T)_{(x)} \left[\alpha(x) \int_{R^n} g(\eta - x) e_{k,n}(\eta - x) \varphi(\eta) d\eta \right] \\ &\quad + (\Delta^k T)_{(x)} \left[(1 - \alpha(x)) \int_{R^n} g(\eta - x) e_{k,n}(\eta - x) \varphi(\eta) d\eta \right]\end{aligned}$$

右辺第一項は，[　　] の台が $\subseteqq \text{car.}(\alpha) \subseteqq K \subseteqq U$ であるから，仮定によって

$$\begin{aligned}&= \int_U \psi(x) \alpha(x) dx \left\{ \int_{\text{car.}(\varphi)} g(\eta - x) e_{k,n}(\eta - x) \varphi(\eta) d\eta \right\} \\ &= \int_{\text{car.}(\varphi)} \varphi(\eta) d\eta \left\{ \int_{\text{car.}(\alpha)} \psi(x) \alpha(x) g(\eta - x) e_{k,n}(\eta - x) dx \right\}\end{aligned}$$

に等しい．$\psi(x)$ は $\text{car.}(\alpha)$ において可積分で，α および g は C^∞ また $e_{k,n}(\eta - x)$ は，(7·3) で与えられたように，

$$\left.\begin{aligned} e_{k,n}(\eta - x) &= B_{k,n} |\eta - x|^{2k-n} && (n = \text{奇数のとき}) \\ &= A_{k,n} |\eta - x|^{2k-n} \log|\eta - x| && (n = \text{偶数のとき}) \end{aligned}\right\} \tag{7·11}$$

の形である．そして

$$\begin{aligned}\frac{\partial |\eta - x|^{2k-n}}{\partial \eta_i} &= (2k - n) |\eta - x|^{2k-n-1} \frac{\eta_i - x_i}{|\eta - x|} \\ &= (2k - n) |\eta - x|^{2k-n-2} (\eta_i - x_i),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial |\eta - x|^{2k-n} \log|\eta - x|}{\partial \eta_i} &= (2k - n) |\eta - x|^{2k-n-2} (\eta_i - x_i) \log|\eta - x| \\ &\quad + |\eta - x|^{2k-n-2} (\eta_i - x_i)\end{aligned}$$

であるから[1]

$$dx=|\eta-x|^{n-1}\cdot d|\eta-x|\cdot d\Omega_{n-1}$$

を用い，$2k-n\geqq 2m$ ならば

$$\int_{\mathrm{car.}(\alpha)}\psi(x)\alpha(x)g(\eta-x)e_{k,n}(\eta-x)dx$$

が，η の函数として C^m に属することがわかる．

次に

$$(\Delta^k T)_{(x)}\left[(1-\alpha(x))\int_{R^n}g(\eta-x)e_{k,n}(\eta-x)\varphi(\eta)d\eta\right]$$

を考える．(7·9)—(7·11) によってわかるように

$$\left.\begin{array}{l}\eta\in\mathrm{car.}(\varphi)\text{ かつ }1-\alpha(x)\neq 0\text{ （すなわち }x\notin U_1\supseteqq\mathrm{car.}(\varphi)\text{）なるとき}\\ e_{k,n}(\eta-x)\text{ は }(\eta,x)\text{ の函数として }C^\infty\text{ である}\end{array}\right\}\tag{7·12}$$

から上式は

$$=\int_{\mathrm{car.}(\varphi)}\varphi(\eta)d\eta\{(\Delta^k T)_{(x)}[(1-\alpha(x))g(\eta-x)e_{k,n}(\eta-x)]\}$$

で，(7.12) と定理 4·3 によって，$\eta\in\mathrm{car.}(\varphi)$ ならば $\{\quad\}$ は η の函数として C^∞ である．(終)

系　超函数 T のすべての偏微分 $D^{(p)}T$ が，開集合 U において局所可積分函数に等しいならば，T は実は U において C^∞ 函数に等しい．

7·3　ポテンシャル論における正射影の方法

まず定理 7·1 の応用として

定理 7·2　ΔT が開集合 U において C^∞ 函数 ψ に等しいとき T は U において C^∞ 函数に等しい．

（証明）$\psi(x)$ を U において C^∞ とすると，$\mathrm{car.}(\varphi)\subseteqq U$ ならば

$$(\Delta T)(\varphi)=\int_U\psi(x)\varphi(x)dx$$

1)　η を中心とする極座標で

よって

$$(\Delta^k T)(\varphi)=(\Delta T)(\Delta^{k-1}\varphi)=\int_U \psi(x)\Delta^{k-1}\varphi dx$$

この右辺は，car.(φ) がコンパクトで U に含まれていることから，部分積分で

$$\int_U \Delta^{k-1}\psi(x)\cdot\varphi(x)dx$$

に等しい．すなわち，すべての k に対して $\Delta^k T$ は U において $\Delta^{k-1}\psi(x)$ に等しい．よって定理 7·1 から T は U において C^∞ 函数に等しい．

Dirichlet の問題 G を R^n の開領域，∂G を G の境界 (boundary) とする．∂G の上で定義せられた連続函数 $b(x)$ に対して，G の内部で**調和** (harmonic) すなわち G において C^∞ かつ $\Delta f(x)=0$ を満足する $f(x)$ で，x が境界 ∂G 上の各点 $x^{(0)}$ に近づくときには $b(x^{(0)})$ に収束するような $f(x)$ を求める．これが古典的な **Dirichlet 問題**である．

正射影の方法 R^n の開集合 G において定義せられた実数値函数 $k(x)$ で

$$\|k\|_G=\left(\int_G |k(x)|^2dx\right)^{1/2}<\infty$$

であるような $k(x)$ の全体 $L_2(G)$ は実 Hilbert 空間をつくる．car.(φ) が $\subseteqq G$ であるような $\varphi(x)\in(\mathfrak{D}_{R^n})$ の全体を $(\mathfrak{D}_G)$ と書けば，$(\mathfrak{D}_G)$ は $L_2(G)$ の部分ベクトル空間と考えてよい．各 $\varphi(x)\in(\mathfrak{D}_G)$ はいずれも G 内のあるコンパクト集合の外では恒等的に 0 となるからである．よってまた $f(x)\in L_2(G)$ が G において調和ならば，部分積分で

$$0=\int_G \Delta f(x)\cdot\varphi(x)dx=\int_G f(x)\Delta\varphi(x)dx,\quad \varphi\in(\mathfrak{D}_G)$$

が成り立つ．この事実の逆も成り立つ．すなわち

Weyl の補助定理[1)] $\tilde{f}(x)\in L_2(G)$ が

$$\text{すべての } \varphi(x)\in(\mathfrak{D}_G) \text{ に対して} \int_G \tilde{f}(x)\Delta\varphi(x)dx=0 \tag{7·13}$$

1) H. Weyl: The method of orthogonal projection in potential theory, Duke Math. J. 7 (1940), 414–444.

を満足するならば，G において調和な函数 $f(x)$ が存在して，G において殆んど至る所 $\tilde{f}(x)=f(x)$ が成り立つ．すなわち $\tilde{f}(x)$ は，その測度が0であるような x の集合 $\subseteqq G$ において適当にその値を修正すれば調和函数になる．

故に $L_2(G)$ は互に直交する二つの部分ベクトル空間 $H(G)$ と $N(G)$ の直和として表わされる．ここに $H(G)$ は G において調和な函数 $\epsilon L_2(G)$ の全体，また $N(G)$ は $\{\Delta\varphi(x)\,;\,\varphi\epsilon(\mathfrak{D}_G)\}$ に $L_2(G)$ におけるノルム $\|\ \ \|_G$ の意味での極限をすべてつけ加えたもの，すなわち $(\mathfrak{D}_G)$ の $L_2(G)$ における閉苞である．Hilbert 空間における内積の連続性によって，$H(G)$ と $\{\Delta\varphi\,;\,\varphi\epsilon(\mathfrak{D}_G)\}$ との直交性 (7·13) から $H(G)$ と $N(G)$ との直交性がいえるからである．

Weyl の補助定理の証明はあとにまわして，これを Dirichlet 問題の解法に用いるしかたを述べておこう．すなわち ∂G においては与えられた連続函数 $b(x)$ と一致するような連続函数 $g(x)\epsilon L_2(G)$ をとり[1]，$g(x)$ の $H(G)$ への正射影 (orthogonal projection) $f(x)$ をとる：

$$g(x)=f(x)+z(x),\quad f\epsilon H(G),\ z\epsilon N(G)$$

$f(x)\epsilon H(G)$ は G において調和である．また $z(x)$ は $N(G)$ であるから，その台がコンパクトで G の内部に含まれるような函数列 $\{\Delta\varphi_h(x)\}$ の $\|\ \ \|_G$ の意味での極限になる．$\Delta\varphi_h(x)$ は境界 ∂G に十分近い所では恒等的に0となるわけであるから，x が ∂G の点に近づくとき $z(x)$ の値は“ほぼ0に近づく”．

したがって x が ∂G の点に近づくとき“f の値はほぼ g の値に近づく”．ここにほぼといったのは，$\Delta\varphi_h(x)$ の $z(x)$ への近づきかたが普通の意味の収束

$$\lim_{h\to\infty}\Delta\varphi_h(x)=z(x)\quad(\text{各 } x\epsilon G \text{ において})$$

ではなく

$$\lim_{h\to\infty}\int_G|z(x)-\Delta\varphi_h(x)|^2dx=0$$

---

1) このような $g(x)$ の存在することを仮定しておく．

であることによる.

このようにすると，境界条件

$$\lim_{x \to x^{(0)} \in \partial G} f(x) = b(x^{(0)})$$

を上のごとく緩かに解釈した Dirichlet 問題の解 $f(x)$ が得られたに過ぎないことになるようにみえるのであるが，境界 ∂G の形状に関して何の制限もない場合にはかく Dirichlet 問題を一般化して解くよりいたしかたあるまい. もし ∂G に適当な制限があれば，上に得た $f(x)$ は本来の Dirichlet 問題の解であることが別途に証明せられるのである[1]. ここにはこれらの点について詳しくは立ち入らないことにして，念のために

Weyl の補助定理の証明を与えておく. $\tilde{f}(x)$ から

$$f_1(x) = \begin{cases} \tilde{f}(x), & x \in G \\ 0, & x \in R^n - G \end{cases}$$

を定義すると，$\tilde{f}(x) \in L_2(G)$ であるから任意のコンパクト集合 $K \subseteqq R^n$ の上で

$$\int_K |f_1(x)| dx \leqq \left(\int_K 1\, dx \cdot \int_K |f_1(x)|^2 dx \right)^{1/2}$$
$$\leqq \left(\int_K dx \right)^{1/2} \cdot \left(\int_G |\tilde{f}(x)|^2 dx \right)^{1/2} < \infty$$

よって $f_1(x)$ は R^n で局所可積分である. 故に超函数 T_{f_1} を考えると，仮定 (7·13) によって ΔT_{f_1} は G において函数 0 に等しい. したがって，定理 7·1 の系によって，T_{f_1} は G において C^∞ 函数 $f(x)$ に等しい. すなわち

$$\text{car.}(\varphi) \subseteqq G \quad \text{ならば} \quad T_{f_1}(\varphi) = T_f(\varphi)$$

故に

$$T_{f_1}(\varphi) = \int_G f_1(x) \varphi(x) dx = \int_G \tilde{f}(x) \varphi(x) dx, \quad T_f(\varphi) = \int_G f(x) \varphi(x) dx$$

から，G において殆んど至る所 $\tilde{f}(x) = f(x)$ でなければならない.

---

1) 例えば S. Bergman and M. Schiffer: Kernel functions and elliptic differential equations in mathematical physics, New York (1953), p. 371—. または L. Nirenberg : Strongly elliptic partial differential equations, Commun. of pure and applied Math., Vol. 8 (1955), 648—.

Neumann の問題　R^n の有界開領域 G の閉苞 $G+\partial G$ で一回連続偏微分可能な $f(x)$ で，G においては調和かつ，ν を内向法線とするとき，∂G においては $\dfrac{\partial f}{\partial \nu}$ が与えられた連続函数 $b(x)$ に等しくなるような $f(x)$ を求める問題を Neumann の問題という．この古典的な問題も正射影の方法で取扱うことができる．例えば

$$(\overline{\mathfrak{D}}_G)=\left\{\varphi(x)\,;\varphi \text{ は } G+\partial G \text{ で } C^1,\ \partial G \text{ では } \frac{\partial \varphi}{\partial \nu}=0 \text{ かつ } G\text{では } C^\infty\right\}$$

とするとき，$G+\partial G$ で C^1 で，∂G では $\dfrac{\partial f}{\partial \nu}=0$ であるような G における調和函数 $f(x)$ は

$$\int_G f(x)\varDelta\varphi(x)dx=0, \qquad \varphi\in(\overline{\mathfrak{D}}_G) \tag{7·14}$$

を満足する．Green の積分公式 (1·19)[1]から

$$\int_G f(x)\varDelta\varphi(x)dx=\int_G \varphi(x)\varDelta f(x)dx-\int_{\partial G} f(x)\frac{\partial \varphi}{\partial \nu}dS+\int_{\partial G}\varphi(x)\frac{\partial f}{\partial \nu}dS \tag{7·15}$$

この右辺第一項は $\varDelta f(x)=0$ から 0，また右辺第二項および第三項も ∂G で $\dfrac{\partial \varphi}{\partial \nu}=0$，$\dfrac{\partial f}{\partial \nu}=0$ から 0 となるからである．逆に $G+\partial G$ において C^1 であるような $\tilde{f}(x)$ が

$$\int_G \tilde{f}(x)\varDelta\varphi(x)dx=0, \qquad \varphi\in(\overline{\mathfrak{D}}_G) \tag{7·14$'$}$$

を満足するとすると，$(\overline{\mathfrak{D}}_G)$ は $(\mathfrak{D}_G)$ を含むから Weyl の補助定理で $f(x)$ は調和函数になる．しかも (7·15) において $f(x)$ の代りに $\tilde{f}(x)$ を代入して，(7·14)′，$\varDelta\tilde{f}(x)=0$ および ∂G で $\dfrac{\partial \varphi}{\partial \nu}=0$ を用い

$$\int_{\partial G}\varphi(x)\frac{\partial f}{\partial \nu}dS=0, \qquad \varphi\in(\overline{\mathfrak{D}}_G) \tag{7·16}$$

よって，$(\overline{\mathfrak{D}}_G)$ が，∂G の上で C^1 である任意の函数値 $C(x^{(0)})$ をとるような $\varphi(x)$ を含むならば (7·16) から ∂G の上で $\dfrac{\partial f}{\partial \nu}=0$ である．このような条

1) (1·19) では ν は外向法線であった．

件は例えば G が原点を中心とする半径1の球ならば満足されている：

$\alpha(x)\epsilon(\mathfrak{D}_{R^n})$ の台が $\subseteqq \left\{x\,;\,\frac{1}{2}\leqq|x|\leqq 2\right\}$ かつ $|x|=1$ の近傍で $\alpha(x)=1$ とし

$$x=tx^{(0)} \quad ((x^{(0)})\epsilon\partial G,\ 0\leqq t\leqq 2) \text{ において}$$

$$\varphi(x)=\varphi(tx^{(0)})=\alpha(tx^{(0)})e^{-(1-t)^2}C(x^{(0)})$$

ととればよい．

かくして $b(x)=0$ に対応する Neumann の問題は，$G+\partial G$ で C^1 でかつ (7·14)′ を満足する $\tilde{f}(x)$ を求めることになった．このような方針で Neumann の問題も正射影の方法のもとに包括できるのであるが，ここでは詳しく論じない．興味をもたれる読者は例えば J. L. Lions の学位論文[1] をみられたい．

7·4 楕円形偏微分方程式

$(\mathfrak{E}_{R^n})$ に属する実数値函数 $\alpha_p(x)$ を係数とする偏微分作用素

$$D=\sum_{|p|\leqq m}\alpha_p(x)D^{(p)}, \qquad D^{(p)}=\frac{\partial^{p_1+\cdots+p_n}}{\partial x_1^{p_1}\cdots\partial x_n^{p_n}}$$

に対しても，点 $x^{(0)}$ の十分小さい近傍にその台が含まれるような $\varphi(x)\epsilon(\mathfrak{D}_{R^n})$ に対しては，x が $x^{(0)}$ の十分小さい近傍に入っているとき

$$\int_{R^n}K(x,y)D'_{(y)}\varphi(y)dy=\varphi(x) \tag{7·17}$$

$$\left(\text{ただし } D'_{(y)}\varphi(y)=\sum_{|p|\leqq m}(-1)^{|p|}D^{(p)}(\alpha_p(y)\varphi(y))\right)$$

を満足する核 $K(x,y)=K(x_1,\cdots,x_n,y_1,\cdots,y_n)$ が存在することがある．このような核を $x^{(0)}$ の近傍における D' の**基本解** (fundamental solution) という．例えば D の**特性形式** (characteristic form)：

$$Q(x,\xi)=\sum_{|p|\leqq m}\alpha_p(x)\xi_1^{p_1}\xi_2^{p_2}\cdots\xi_n^{p_n}$$

が実数値ベクトル $\xi=(\xi_1,\cdots,\xi_n)\neq(0,\cdots,0)$ なるとき $x^{(0)}$ の近傍で決して0とはならないとき，すなわち D が $x^{(0)}$ の近傍で**楕円形** (elliptic) な場合には次のように基本解の存在がいえる．

---

1) Problèmes aux limites en théorie des distributions, Acta Math. 94 (1955).

定理 7·3　D の係数 $\alpha_p(x)$ が点 $x^{(0)}$ の近傍で解析的すなわち $x^{(0)}$ の近傍で絶対かつ一様収束する Taylor 展開が可能で，かつ D がこの近傍で楕円形であるとする．このとき $x^{(0)}$ の近傍における D の基本解で

$$K(x,y)=|x-y|^{m-n}\left\{B\left(x,y,|x-y|,\frac{x-y}{|x-y|}\right)\right.$$

$$\left.+A\left(x,y,|x-y|,\frac{x-y}{|x-y|}\right)\log|x-y|\right\} \qquad (7\cdot18)$$

の形のものが存在する．ここに

$$B(x,y,r,\zeta),\quad A(x,y,r,\zeta)$$

は x,y が十分 $x^{(0)}$ に近く，$|r|$ が十分小さくかつ $|\eta|=1$ なる任意のパラメター $\eta=(\eta_1,\cdots,\eta_n)$ に対して

$$|\zeta|=1 \text{ で } \zeta\cdot\eta=\sum_{i=1}^{n}\zeta_i\eta_i\geqq\frac{1}{2}$$

なるところでは，これらの x,y,r,ζ に関して絶対かつ一様収束する Taylor 展開が可能である．

（証明は F. John : Plane waves and spherical means applied to partial differential equations (1955), p. 43—をみられたい）．

故に $x^{(0)}=0$ とし，$g(x)\epsilon(\mathfrak{D}_{R^n})$ を $x=0$ の十分小さい近傍で1となる函数とすれば，§ 7·1 におけると同じく

$$T_{K(0,y)g(y)} \qquad (7\cdot19)$$

が $D'_{(y)}$ のパラメトリックスであることがわかる．

パラメトリックスが得られたのであるから，$D=D'$ がラプラシアンの場合にすでに述べたような D に関する Dirichlet 問題や Neumann 問題を

$$\int_{R^n}\tilde{f}(x)D'_{(x)}\varphi(x)dx=0$$

に基づく正射影の方法によって扱うことができるわけである．

7.5 原始超函数

定理 7·4　$T^{(1)},T^{(2)},\cdots,T^{(n)}$ がコンパクトな台をもつ超函数であるときに

$$\frac{\partial T}{\partial x_i}=T^{(i)} \quad (i=1,2,\cdots,n) \tag{7·20}$$

が成り立つような超函数 T が存在するための必要かつ十分な条件は

$$\frac{\partial T^{(i)}}{\partial x_j}=\frac{\partial T^{(j)}}{\partial x_i} \quad (i,j=1,2,\cdots,n) \tag{7·21}$$

が成り立つことである.

(このような T を $(T^{(1)},\cdots,T^{(n)})$ の**原始超函数** (primitive distribution) とよぶ).

(証明) 必要なこと : $\dfrac{\partial^2 T}{\partial x_i \partial x_j}=\dfrac{\partial}{\partial x_i}\left(\dfrac{\partial T}{\partial x_j}\right)=\dfrac{\partial}{\partial x_j}\left(\dfrac{\partial T}{\partial x_i}\right)$ から明らか.

十分なこと : ラプラシアン $\varDelta=\varDelta_{(x)}$ の素解 $T_{e(x)}$ をとり

$$T=\sum_{i=1}^{n} T^{(i)} * \frac{\partial}{\partial x_i} T_{e(x)} \tag{7·22}$$

をつくると仮定 (7·21) によって, (5·9) を繰返し用い

$$\frac{\partial T}{\partial x^j}=\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial T^{(i)}}{\partial x_j} * \frac{\partial}{\partial x_i} T_{e(x)}=\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial T^{(j)}}{\partial x_i} * \frac{\partial}{\partial x_i} T_{e(x)}$$

$$=\sum_{i=1}^{n} T^{(j)} * \frac{\partial^2}{\partial x_i{}^2} T_{e(x)}=T^{(j)} * \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_i{}^2} T_{e(x)}\right)$$

$$=T^{(j)} * T_\delta=T^{(j)}.$$

注 $T^{(i)}$ がいずれも R^n において C^∞ 函数に等しいならば, (7·22) に得た原始超函数 T は R^n において C^∞ 函数に等しい. (5·9) よって

$$\varDelta T=\sum_{i=1}^{n} (\varDelta T^{(i)}) * \frac{\partial}{\partial x_i} T_{e(x)}$$

となるから, R^n において C^∞ 函数に等しい超函数との畳み込みとして右辺は R^n において C^∞ 函数に等しい. よって定理 7·2 から T は R^n において C^∞ 函数に等しいのである. この結果は $T^{(i)}=T_{f_i(x)}$ として古典的な線積分による方法

$$T=T_f,\ f(x_1, x_2, \cdots, x_n)=\int_{(0,\cdots,0)}^{(x_1,0,\cdots,0)} f_1(t,0,\cdots,0)dt$$

$$+\int_{(x_1,0,\cdots,0)}^{(x_1,x_2,0,\cdots,0)} f_2(x_1,t,0,\cdots,0)dt+\cdots+\int_{(x_1,\cdots,x_{n-1},0)}^{(x_1,x_2,\cdots,x_n)} f_n(x_1,\cdots,x_{n-1},t)dt$$

によっても得られるのである.

第 8 章　核 超 函 数[1]

8·1　核超函数の定義

$\varphi(x)\in(\mathfrak{D}_{R^n})=(\mathfrak{D}_x)$ と $T=T_{(x)}\in(\mathfrak{D}_x)'$ に対して

$$T(\varphi)=T_{(x)}(\varphi(x))=\int_{R^n}T_{(x)}\cdot\varphi(x)dx \tag{8·1}$$

と書くことにすれば，T が局所可積分な $f(x)$ によって T_f と与えられるときの

$$T_f(\varphi)=T_{f(x)}(\varphi(x))=\int_{R^n}f(x)\cdot\varphi(x)dx \tag{8·2}$$

と符合している．

核超函数の定義（$\mathfrak{D}_{R^n\times R^m})=(\mathfrak{D}_{x\times y}$）の上の超函数 $K=K_{(x,y)}$ を，$R^n\times R^m$ の上の**核超函数**（kernel distribution）ということにすると，(8·1) の記法で $u(x)\in(\mathfrak{D}_x)$，$v(y)\in(\mathfrak{D}_y)$ なるとき

$$K_{(x,y)}(u(x)\times v(y))=\iint_{R^n\times R^m}K_{(x,y)}u(x)v(y)dxdy \tag{8·3}$$

となる．

$$B_K(u,v)=\iint_{R^n\times R^m}K_{(x,y)}u(x)v(y)dxdy \tag{8·3$'$}$$

とおくと，この B は明らかに次の二つの性質をもつ：

1°　$B_K(u,v)$ は (u,v) に関して双一次（bilinear）すなわち

$$B_K(\alpha_1u_1+\alpha_2u_2,\beta_1v_1+\beta_2v_2)=\sum_{i,j=1}^{2}\alpha_i\beta_jB_K(u_i,v_j) \tag{8·4}$$

2°　u（または v）を定めたとき，$B_K(u,v)$ は v（または u）に関して連続である．　(8·5)

故に　v を定めたとき得られる（$\mathfrak{D}_x$）の上の超函数を $(K\cdot v)_{(x)}$ 書とくことにすれば，(8·1) によって

1)　L. Schwartz : Théorie des noyaux, Proc.Internat. Congress of Math. (1950), 220—

$$B_K(u,v)=(K\cdot v)_{(x)}u(x)=\int_{R^n}(K\cdot v)_{(x)}\cdot u(x)dx$$

となって

$$\int_{R^n}(K\cdot v)_{(x)}u(x)dx=\iint_{R^n\times R^m}K_{(x,y)}\cdot u(x)v(y)dxdy \tag{8·6}$$

これから次の定理が得られる．

定理 8·1　核超函数 $K_{(x,y)}$ は (8·6) によって $(\mathfrak{D}_y)$ から $(\mathfrak{D}_x)'$ の中への加法的写像[1]

$$v(y)\to(Kv)_{(x)}=\int_{R^m}K_{(x,y)}v(y)dy \tag{8·7}$$

を定義するが，この加法的写像は連続である．すなわち $h\to\infty$ なるとき

$$v_h(y)\Longrightarrow 0\ ((\mathfrak{D}_y))\ \text{ならば}\ (Kv_h)_{(x)}\Longrightarrow 0\ ((\mathfrak{D}_x)') \tag{8·8}$$

が成り立つ．

（証明）　収束定理によって，各 $u(x)\in(\mathfrak{D}_x)$ に対して $\lim_{h\to\infty}(Kv_h)_{(x)}(u(x))=0$ の成り立つことがいえればよいが，これは，

$$(Kv_h)_{(x)}(u(x))=B_K(u,v_h)=K_{(x,y)}(u(x)\times v_h(y))$$

を用い

$$v_h(y)\Longrightarrow 0\ ((\mathfrak{D}_y))\ \text{ならば}\ u(x)\times v_h(y)\Longrightarrow 0\ ((\mathfrak{D}_{x\times y}))$$

が成り立つことと $K_{(x,y)}$ の連続性とから，明らかである．

積分作用素　核超函数 $K_{(x,y)}$ が，$R^n\times R^m$ において局所可積分な函数 $K(x,y)$ によって

$$K_{(x,y)}(\varphi(x,y))=T_K(\varphi)=\iint_{R^n\times R^m}K(x,y)\varphi(x,y)dxdy,\ \varphi\in(\mathfrak{D}_{x\times y}) \tag{8·9}$$

の形に与えられるときには (8·3) から

$$\iint_{R^n\times R^m}K_{(x,y)}u(x)v(y)dxdy=\iint_{R^n\times R^m}K(x,y)u(x)v(y)dxdy$$

となって都合がよい．このときは

1)　$K(\alpha v_1+\beta v_2)=\alpha Kv_1+\beta Kv_2$.

$$(K\cdot v)_{(x)}(u(x))=T_{\tilde{v}(x)}\cdot(u(x)),\quad \tilde{v}(x)=\int_{R^m}K(x,y)v(y)dy \tag{8·10}$$

となるわけで K は核 $K(x,y)$ による**積分作用素** (integral operator) である. (8·7) は (8·10) と符合するのである.

共役作用素 K' (8·6) と同じく ($\mathfrak{D}_x$) から ($\mathfrak{D}_y$)′ への連続な加法的写像

$$u(x)\to(K'u)_{(y)}$$

が

$$(K'u)_{(y)}=\int_{R^n}K_{(x,y)}u(x)dx \tag{8·7)'$$

によって定義されるが, 積分作用素の場合には (8·7)′ と符合して

$$(K'u)_{(y)}(v(y))=T_{\tilde{u}(y)}(v(y)),\quad \tilde{u}(y)=\int_{R^n}K(x,y)u(x)dx \tag{8·10)'$$

が成り立つ.

8·2 δ-函数の解釈

$n=m$ とする. Dirac の δ-函数 (序論) を核超函数の立場から解釈するためにいくつかの例を挙げる.

例 1

$$I_{(x,y)}(\varphi(x,y))=\iint_{R^n\times R^n}I_{(x,y)}\varphi(x,y)dxdy=\int_{R^n}\varphi(t,t)dt \tag{8·11}$$

によって定義される核超函数 $I_{(x,y)}$ を考える.

$$\iint_{R^n\times R^n}I_{(x,y)}\cdot u(x)v(y)dxdy=\int_{R^n}u(t)v(t)dt$$

であるから

$$(I\cdot v)_{(x)}=\int_{R^n}I_{(x,y)}v(y)dy=T_{v(x)} \tag{8·12}$$

である.

例 2 任意の $S_{(x)}\in(\mathfrak{D}_x)'$ に対して

$$\iint_{R^n\times R^n}K_{(x,y)}\varphi(x,y)\,dxdy=\int_{R^n}S_{(t)}\varphi(t,t)dt \tag{8·13}$$

で定義される核超函数 $K_{(x,y)}$ を考える．積の定義 (4・7) から

$$\iint_{R^n\times R^n} K_{(x,y)}u(x)v(y)dxdy=\int_{R^n} S_{(t)}u(t)v(t)dt=(v\cdot S)(u)$$

であるから

$$(K\cdot v)_{(x)}=v(x)\cdot S_{(x)}. \tag{8・14}$$

とくに

$$S_{(x)}=T_{\alpha(x)} \quad \text{ならば} \quad K_{(x,y)}=\alpha(x)I_{(x,y)} \tag{8・15}$$

であることは明らかである．

例 3 任意の $S_{(x)}\in(\mathfrak{D}_x)'$ に対して核超函数 $K_{(x,y)}=S_{(x-y)}$ を

$$\iint_{R^n\times R^n} K_{(x,y)}\varphi(x,y)dxdy=\iint_{R^n\times R^n} S_{(x-y)}\varphi(x,y)dxdy$$
$$=\int_{R^n} S_{(x)}\left[\int_{R^n}\varphi(x+t,t)dt\right]dx \tag{8・16}$$

によって定義する．

$$\iint_{R^n\times R^n} K_{(x,y)}u(x)v(y)dxdy=\int_{R^n} S_{(x)}\left[\int_{R^n} u(x+t)v(t)dt\right]dx$$
$$=S_{(x)}T_{v(t)}(u(x+t))=(S*T_v)(u)$$

したがってこのとき

$$(K\cdot v)_{(x)}=(S*T_v)_{(x)} \tag{8・17}$$

になる．

以上から δ-函数に関する Dirac の公式

$$v(x)=\int_{R^n}\delta(x-y)v(y)dy \tag{8・18}$$

$$\alpha(x)v(x)=\int_{R^n}\alpha(x)\delta(x-y)v(y)dy \tag{8・19}$$

の解釈がつく．すなわち $S_{(x)}=T_{\delta(x)}$ として例1，例2から

$$I_{(x,y)}=T_{\delta(x-y)} \tag{8・20}$$

と書いてよいことがわかるし，そうすれば，(8・15) から (8・19) が解釈できる．また Dirac のもう一つの公式

$$\frac{\partial v}{\partial x_1}=\int_{R^n}\frac{\partial}{\partial x_1}\delta(x-y)\cdot v(y)dy \tag{8·21}$$

も解釈できる．

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_1}I_{(x,y)}\right)(\varphi(x,y))=(-1)\int_{R^n\times R^n}I_{(x,y)}\frac{\partial\varphi(x,y)}{\partial x_1}dxdy$$

であるから

$$\iint_{R^n\times R^n}\frac{\partial}{\partial x_1}I_{(x,y)}\cdot u(x)v(y)dxdy=(-1)\int_{R^n}\frac{\partial u(t)}{\partial t_1}v(t)dt$$

$$=\left(\frac{\partial}{\partial x_1}T_v\right)(u)=T_{\partial v/\partial x_1}(u)$$

を得て，次の公式が成り立つからである．

$$\left(\frac{\partial I_{(x,y)}}{\partial x_1}\cdot v\right)_{(x)}=T_{\partial v/\partial x_1} \tag{8·22}$$

8·3　定理 8·1 の逆

核超函数 $K(x,y)$ すなわち $(\mathfrak{D}_{x\times y})'$ に属する超函数を特徴づけるために定理 8·1 の逆を証明する．すなわち

定理 8·2　$(\mathfrak{D}_y)$ から $(\mathfrak{D}_x)'$ への連続な加法的写像

$$v(y)\to(K\cdot v)_{(x)}$$

が与えられたとすると，これは $(\mathfrak{D}_{x\times y})$ の上の超函数 $K_{(x,y)}$ から (8·7) のごとくして得られたものに他ならない．

（証明）　$B_K(u,v)=(K\cdot v)_{(x)}(u(x))$ は明らかに $u(x)\in(\mathfrak{D}_x)$ と $v(y)\in(\mathfrak{D}_y)$ に関して双一次である．$(K\cdot v)_{(x)}\in(\mathfrak{D}_x)'$ であるから，$B_K(u,v)$ は v を固定すると $u\in(\mathfrak{D}_x)$ に関して連続である．また $v(y)\to(K\cdot v)_{(x)}$ が $(\mathfrak{D}_y)$ から $(\mathfrak{D}_x)'$ への写像として連続であるから，収束定理（§ 3·3）によって，$B_K(u,v)$ は u を固定すると $v\in(\mathfrak{D}_y)$ に関して連続である．

以上の性質から次のことがいえるとよい：

$B_K(u,v)$ は $u\in(\mathfrak{D}_x)$ と $v\in(\mathfrak{D}_y)$ の双方に関して連続である．　(8·23)

もし (8·23) がいえたならば，定理 4·1 を使って，

$$B_K(u,v)=\iint_{R^n\times R^m}K_{(x,y)}u(x)v(y)dxdy$$

となるような $K_{(x,y)}\in(\mathfrak{D}_{x\times y})'$ の存在がいえて，$B_K(u,v)=(K\cdot v)_{(x)}(u(x))$ により

$$(Kv)_{(x)}=\int_{R^m}K_{(x,y)}v(y)dy$$

となるからである．

((8・23) の証明)　$u_h\Longrightarrow 0$ $((\mathfrak{D}_x))$, $v_h\Longrightarrow 0$ $((\mathfrak{D}_y))$ なるとき $B_K(u_h,v_h)\to 0$ をいえばよい．ところが $B_K(u,v)$ が u を固定したとき v に関して連続であるから

$$\lim_{h\to\infty}(B_K(u,v_h)-B_K(u,0))=0$$

よって $(\mathfrak{D}_x)$ の上の超函数列

$$F^{(h)}(u)=B_K(u,v_h)-B_K(u,0)\quad(h=1,2,\cdots)$$

は，定理 3・4 によって，$(\mathfrak{D}_x)$ の有界集合 $\mathfrak{B}$ の上で有界である．すなわち

$$\sup_{u(x)\in\mathfrak{B},\ h\geqq 1}|F^{(h)}(u)|=C(\mathfrak{B})<\infty$$

一方において $u_h\Longrightarrow 0$ $((\mathfrak{D}_x))$ であるから，定理 3・2 によって

$\lim_{h\to\infty}m_h=\infty$ なる正数列 $\{m_h\}$ に対して $\{m_hu_h(x)\}=\mathfrak{B}$ が $(\mathfrak{D}_x)$ の有界集合

になる．故に

$|F^{(h)}(m_hu_h)|\leqq C(\mathfrak{B})$，したがって

$$|B_K(u_h,v_h)-B_K(u_h,0)|\leqq m_h^{-1}C(\mathfrak{B})$$

を得て $B_K(u,0)$ の u に対する連続性から

$$\lim_{h\to\infty}B_K(u_h,v_h)=\lim_{h\to\infty}B_K(u_h,0)=0\qquad\text{(終)}$$

注意　函数空間から函数空間への "連続な加法的写像" K を

$$v(y)\to\int K(x,y)v(y)dy$$

のごとき積分作用素で表現することは，積分方程式論の発生以来しばしば希望されてきたところである．最も有名なのが Dirac の δ–函数による表現 (8・18), (8・19) および

(8·21) という一連の公式であるが，$\delta(x)$ を普通の函数と考えてはこれらが不可能なことは明らかである．序論に述べたごとく

$$\delta(x)=\begin{cases}0, & x\neq 0 \text{ のとき}\\ \infty, & x=0 \text{ のとき,}\end{cases} \qquad \text{かつ} \quad \int_{R^n}\delta(x)dx=1$$

とせざるを得ないからである．"一般化された積分" (8·1) の考えかたによれば，"一般化された積分作用素"

$$v(y)\to\int_{R^m} K_{(x,\,y)}v\,dy=(K\cdot v)_{(x)}$$

で表現されるものとして，$(\mathfrak{D}_y)$ から $(\mathfrak{D}_x)'$ への連続な加法的写像が特徴づけられたことになったわけである．しかも Dirac の公式もこのような立場から円滑に解釈できるので都合がよいのである．

次には核超函数 $K_{(x,y)}$ が具体的な函数 $K(x,y)$ による超函数 $T_{K(x,y)}$ であるためには加法的写像 K がどんなものでなければならないかということが問題になる．これらについてはさきに挙げた Schwartz の論文をみられたい．

なお次章以後では誤解のないために，核超函数論的記法 (8·1) は用いないことにする．すなわち積分記号は普通の意味の積分の場合以外には用いない．

第 9 章　超函数の Fourier 級数

9.1 $(\mathfrak{D}_{T^n})$ および $(\mathfrak{D}_{T^n})'$

$(\mathfrak{D}_{T^n})$ の定義　n 個の単位円周の直積を T^n と書いて n 次元の **Torus** とよぶ．よって T^n の上の点を

$$(e^{2\pi\sqrt{-1}x_1}, e^{2\pi\sqrt{-1}x_2}, \cdots, e^{2\pi\sqrt{-1}x_n}), \quad (-\infty < x_i < \infty\ ;\ i=1,2,\cdots,n) \tag{9·1}$$

で表わすことができる．

$$x_1 \equiv x_1' \ (\text{mod. } 1), \cdots, x_n \equiv x_n' \ (\text{mod. } 1)$$

ならば $(e^{2\pi\sqrt{-1}x_1}, \cdots, e^{2\pi\sqrt{-1}x_n})$ と $(e^{2\pi\sqrt{-1}x_1'}, \cdots, e^{2\pi\sqrt{-1}x_n'})$ とは T^n 上の同一の点を表わす．よって T^n の上で定義された函数というのは，$(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ の函数で各 x_i の各々について周期 1 の周期函数として表わされるものに他ならない．T^n の上で定義せられた複素数値函数 $\varphi(x_1, \cdots, x_n)$ で $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ について C^∞ であるようなものの全体を $(\mathfrak{D}_{T^n})$ で表わす．$(\mathfrak{D}_{T^n})$ の函数列 $\varphi_h(x) = \varphi_h(x_1, \cdots, x_n)$ の恒等的に 0 なる函数 0 への収束 $\Longrightarrow 0$ を，

$h \to \infty$ なるとき $\varphi_h(x)$ およびそのすべての偏導函数 $\partial\varphi_h/\partial x_i$, $\partial^2\varphi_h/\partial x_i \partial x_j, \cdots$ の各々が 0 に一様収束すること

によって定義し

$$\lim_{h\to\infty} \varphi_h(x) = 0 \ ((\mathfrak{D}_{T^n})) \quad \text{または略して} \quad \varphi_h \Longrightarrow 0 \ ((\mathfrak{D}_{T^n})) \tag{9·2}$$

で表わす．

$(\mathfrak{D}_{T^n})'$ の定義　$(\mathfrak{D}_{T^n})$ の上で定義せられた複素数値の汎函数 T で

$$\left.\begin{array}{ll} T(\alpha_1\varphi_1 + \alpha_2\varphi_2) = \alpha_1 T(\varphi_1) + \alpha_2 T(\varphi_2) & \text{（加法性）} \\ \varphi_h \Longrightarrow 0 \ (\mathfrak{D}_{T^n}) \text{ ならば } T(\varphi_h) \to 0 & \text{（連続性）} \end{array}\right\} \tag{9·3}$$

を満足するものを $(\mathfrak{D}_{T^n})$ の上の超函数とよび，かかる T の全体を $(\mathfrak{D}_{T^n})'$ と書く．

$(\mathfrak{D}_{T^n})$ および $(\mathfrak{D}_{T^n})'$ についても $(\mathfrak{D}_{R^n})$ および $(\mathfrak{D}_{R^n})'$ について論じた

と同様なことが殆んどそのまま成り立つ．しかも T^n がコンパクトであるから証明などがずっと簡単化されることが多いのである．

9.2 超函数の Fourier 級数

T^n の指標　整数の組 $p=(p_1,p_2,\cdots,p_n)$ と T^n の点 $x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ に対してその内積

$$p\cdot x=\sum_{i=1}^{n}p_i x_i \tag{9·4}$$

を定義し，T^n の**指標** (character) とよばれる

$$\chi_p(x)=\exp(2\pi\sqrt{-1}p\cdot x) \tag{9·5}$$

を定義する．$\chi_p(x)\epsilon(\mathfrak{D}_{T^n})$ である．

定理 9·1　各々の $T\epsilon(\mathfrak{D}_{T^n})$ に対しその Fourier 係数

$$c_p=c_p(T)=T(\chi_{-p}) \tag{9·6}$$

を定義すると[1]，正の整数 $k=k(T)$ が定まって $|p|\to\infty$ なるとき

$$|c_p|=O((1+|p|^2)^k) \tag{9·7}$$

が成り立つ[2]．すなわち

$$\sup_p |c_p|\cdot(1+|p|^2)^{-k}<\infty \tag{9·7$'$}$$

（証明）　定理 2·5 と全く同様にして，整数 $m_0=m_0(T)\geqq 0$ と $\kappa=\kappa(T,m_0)>0$ および $\|f\|_{T^n}=\left(\int_{T^n}|f(x)|^2dx\right)^{1/2}\leqq\kappa^{1/2}$ なる $f(x)=f(x\,;\,T,m_0)$ が定まって[3]

$$\varphi\epsilon(\mathfrak{D}_{T^n})\text{ に対して }T(\varphi)=\int_{T^n}f(x)\frac{\partial^{m_0+1}\varphi(x)}{\partial x^{m_0+1}}dx \tag{9·8}$$

故に

$$\frac{\partial^{m_0+1}}{\partial x^{m_0+1}}\chi_{-p}(x)=\left(\prod_{i=1}^{n}(-2\pi\sqrt{-1}p_i)\right)^{m_0+1}\chi_p(x)$$

---

1)　$-p=(-p_1,-p_2,\cdots,-p_n)$　　2)　$|p|^2=\sum_i^n p_i^2$

3)　$\dfrac{\partial^m\varphi}{\partial x^m}=\dfrac{\partial^{mn}\varphi}{\partial x_1{}^m\partial x_2{}^m\cdots\partial x_n{}^m}$　(§ 2)

によって

$$c_p = T(\chi_{-p}) = \left(\prod_{i=1}^{n}(-2\pi\sqrt{-1}p_i)\right)^{m_0+1}\int_{T^n} f(x)\chi_{-p}(x)dx$$

$|\chi_{-p}(x)|=1$ であるから，Schwarz の不等式を用い

$$|c_p| \leqq \left(\prod_{i=1}^{n} 2\pi|p_i|\right)^{m_0+1}\left(\int_{T^n} dx\right)^{1/2}\left(\int_{T^n} |f(x)|^2dx\right)^{1/2}$$

$$\leqq \left(\prod_{i=1}^{n} 2\pi|p_i|\right)^{m_0+1}\cdot\kappa^{1/2}$$

これから (9·7)′ の成り立つような $k>0$ の存在することがわかる．（終）

定理 9·2 (9·7)′ を満足するような複素数列 $\{c_p\}$ に対して，ちょうど c_p をその Fourier 係数とするような超函数 T が存在する．

（証明） 仮定から十分大きい正整数 s に対して

$$\sum_p \frac{|c_p|}{(1+|p|^2)^s}$$

が収束する．よって

$$f(x) = \sum_p \frac{c_p}{(1+|p|^2)^s}\chi_p(x) \tag{9·9}$$

は絶対かつ一様に収束する．

ところがラプラシアン $\Delta = \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$ に対して

$$(4\pi^2-\Delta)\chi_p(x) = 4\pi^2(1+|p|^2)\chi_p(x) \tag{9·10}$$

である．よって

$$(4\pi^2-\Delta)T_{\chi_p} = T_{(4\pi^2-\Delta)\chi_p} = 4\pi^2(1+|p|^2)T_{\chi_p}.$$

を用い，項別微分定理[1]によって

$$(4\pi^2-\Delta)^sT_f = \sum_p \frac{c_p}{(1+|p|^2)^s}(4\pi^2-\Delta)^sT_{\chi_p}$$

$$= (4\pi^2)^s\sum_p c_pT_{\chi_p} \tag{9·11}$$

を得る．一方また

1） 定理 3·5 の系

$$p \neq p' \text{ ならば } T_{\chi_p}(\chi_{-p'}) = \int_{T^n} \chi_p(x)\chi_{-p'}(x)dx$$
$$= \int_{T^n} \exp(2\pi\sqrt{-1}(p-p')\cdot x)dx = 0$$

であるから

$$\left(1-\frac{\Delta}{4\pi}\right)^s T_f(\chi_{-p'}) = \sum_p c_p T_{\chi_p}(\chi_{-p'}) = c_{p'}$$

故に $\left(1-\frac{\Delta}{4\pi}\right)^s T_f$ が求める超函数である．（終）

系 任意の $T\in(\mathfrak{D}_{T^n})'$ に対して，その Fourier 級数

$$\sum_p c_p(T) T_{\chi_p} \tag{9·12}$$

は $(\mathfrak{D}_{T^n})'$ の収束の意味で T に収束する．すなわちすべての $\varphi\in(\mathfrak{D}_{T^n})$ に対し

$$\lim_{m\to\infty} \sum_{|p|\leq m} c_p(T) T_{\chi_p}(\varphi) = T(\varphi) \tag{9·13}$$

注 このようにして超函数論的には，Fourier 級数論において収束発散に関するめんどうな議論をしなくても済むのである．すなわち複素数列 $\{c_p\}$ が超函数 $T\in(\mathfrak{D}_{T^n})'$ の Fourier 係数であるための必要かつ十分な条件は，$\{c_p\}$ が次の意味で**緩増加** (slowly increasing) であることである：

適当に正の整数 k をとると，$|p|\to\infty$ なるとき $|c_p| = O((1+|p|^2)^k)$

しかしてまた T が $\in(\mathfrak{D}_{T^n})'$ であるための必要かつ十分な条件は T^n の上での連続函数 $f(x)$ と正の整数 s とが存在して

$$T = \left(1-\frac{\Delta}{4\pi}\right)^s T_f$$

の成り立つことである．

9·3 定差方程式への応用

二つの整数 p_1, p_2 を添字とする数列 b_{p_1,p_2} が $|p|^2 = p_1^2+p_2^2 \to \infty$ なるとき緩増加と仮定する．このとき $|p|\to\infty$ に対して緩増加な a_{p_1,p_2} で**定差方程式** (difference equation)

$$a_{p_1+1,p_2} + a_{p_1-1,p_2} + a_{p_1,p_2+1} + a_{p_1,p_2-1} - 4\lambda a_{p_1,p_2} = b_{p_1,p_2} \tag{9·14}$$

$$(\text{ただし } \lambda \text{ は複素パラメター})$$

を満足するものを求む．前 § によって a_{p_1,p_2} および b_{p_1,p_2} を T^2 上の超函数 A,B の Fourier 係数と考えることができる．

$$2(\cos 2\pi x+\cos 2\pi y-2\lambda)\cdot A$$

の Fourier 係数[1)]

$$\begin{aligned}
&\{2(\cos 2\pi x+\cos 2\pi y-2\lambda)\cdot A\}\chi_{-p}(x)\\
&\quad=A\left(2(\cos 2\pi x+\cos 2\pi y-2\lambda)\cdot\exp\left(-2\pi\sqrt{-1}\sum_{i=1}^{2}p_ix_i\right)\right)\\
&\quad=A(\chi_{-p_1-1,-p_2}(x)+\chi_{-p_1+1,-p_2}(x)+\chi_{-p_1,-p_2-1}(x)\\
&\qquad\qquad+\chi_{-p_1,-p_2+1}(x)-4\lambda\chi_{-p_1,-p_2}(x))\\
&\quad=a_{p_1+1,p_2}+a_{p_1-1,p_2}+a_{p_1,p_2-1}+a_{p_1,p_2+1}+a_{p_1,p_2-1}-4\lambda a_{p_1,p_2}
\end{aligned}$$

となるから

$$2(\cos 2\pi x+\cos 2\pi y-2\lambda)A=B \tag{9·15}$$

が成り立たねばならない．ここでパラメター λ についての種々な場合を区別する．

i) λ が実数でないかあるいは実数であって $|\lambda|>1$ のとき：このときは除法ができて (9·15) は

$$A=\frac{1}{2(\cos 2\pi x+\cos 2\pi y-2\lambda)}\cdot B \tag{9·16}$$

と解ける．だから (9·14) の緩増加な解 a_{p_1,p_2} は (9·16) の Fourier 係数で与えられ，これ以外に緩増加な解はない．

ii) λ が実数で $|\lambda|<1$, $\lambda\neq 0$ のとき：

$$\cos 2\pi x+\cos 2\pi y-2\lambda=0$$

を満足する $(x,y)\in T^2$ の集合 N_λ を考える．$P(x,y,\lambda)=\cos 2\pi x+\cos 2\pi y-2\lambda$ とおくとき N_λ においては

$$\frac{\partial P}{\partial x}=-2\pi\sin 2\pi x,\quad \frac{\partial P}{\partial y}=-2\pi\sin 2\pi y$$

---

1) $\chi_p(x)=\chi_{p_1,p_2}(x)$ と書く．

は同時に0になり得ない．$|\lambda|<1$, $\lambda\neq0$ であるからである．故に定理 4·9 の注意によって $P(x)$ による除法が可能になり，(9·15) は解 (9·16) をもつ．この場合にも (9·14) の緩増加な解は (9·16) の Fourier 係数で与えられるのだから (9·14) は解けるわけである．しかし，いまの場合には解は一意的に定まらない．(9·15) の一つの解に

$$2(\cos 2\pi x+\cos 2\pi y-2\lambda)C=0 \tag{9·17}$$

の解 C を加えたものも (9·15) の解になり，かついまの場合 (9·17) は 0 ならざる解 C をもつからである．この C としては例えば N_λ の上の任意の点 $(x^{(0)}, y^{(0)})$ をとり $C(\varphi)=\varphi(x^{(0)}, y^{(0)})$ なる超函数 C を考えればよいのである．

iii) $\lambda=0$ および $\lambda=\pm1$ のとき：このときは，いずれも $P(x)$ による除法が可能になって (9·14) が解けるのであるが，ここでは立ち入らないことにする．

第 10 章　急減少な函数の Fourier 変換

函数 $f(x)=f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ の **Fourier 変換** (Fourier transform)

$$(\mathfrak{F}f)(y)=\int_{R^n} \exp(-2\pi i y\cdot x)f(x)dx, \quad y\cdot x=\sum_{i=1}^{n} y_i x_i$$

については形式的に積分の順序が交換できれば

$$\int_{R^n} (\mathfrak{F}f)(y)\cdot g(y)dy=\int_{R^n} f(x)\left\{\int_{R^n} \exp(-2\pi i x\cdot y)g(y)dy\right\}dx$$

$$=\int_{R^n} f(x)(\mathfrak{F}g)(x)dx$$

を得るから，超函数 $T_{f(x)}$ の Fourier 変換 $(\mathfrak{F}T_f)_{(y)}$ を

$$(\mathfrak{F}T_f)_{(y)}(g(y))=T_{f(x)}(\mathfrak{F}g)(x)$$

によって定義することが示唆される．しかし $g(y)\epsilon(\mathfrak{D}_y)$ であっても $(\mathfrak{F}g)(x)$ は，一般にコンパクトな台をもたない[1]から，$(\mathfrak{F}g)(x)$ は $(\mathfrak{D}_x)$ に属するとは限らない．だから上の考えで超函数 $T\epsilon(\mathfrak{D}_{R^n})'$ の Fourier 変換を定義することは一般には不可能である．Schwartz は "R^n 上の急減少な C^∞ 函数の空間" $(\mathfrak{S}_{R^n})$ を考えると，$(\mathfrak{S}_{R^n})$ の上の超函数についてはその Fourier 変換の理論を円滑に組立てられることを示したのである．これを述べるためにまず $(\mathfrak{S}_{R^n})$ における Fourier 変換を準備する．

10·1　急減少な函数の Fourier 変換

$(\mathfrak{S}_{R^n})$ の定義　R^n で定義せられた複素数値の C^∞ 函数 $\varphi(x)=\varphi(x_1, \cdots, x_n)$ で，$|x|\to\infty$ なるとき $\varphi(x)$ および $\varphi(x)$ のすべての偏導函数が $|x|^{-1}$ の何乗よりも急速に減少する (rapidly decreasing at ∞) とする．すなわち，すべての $p=\{p_1, p_2, \cdots, p_n\}$ とすべての整数 $k\geqq 0$ に対して

$$\lim_{|x|\to\infty} |(1+|x|^k)D^{(p)}\varphi(x)|=0 \tag{10·1}$$

1)　そのような例は容易につくることができる．なお § 10·3 の Paley–Wiener の定理を参照せよ．

であるような $\varphi(x)$ の全体を $(\mathfrak{S}_{R^n})$ または $(\mathfrak{S}_x)$ と書いて，**R^n 上の急減少な C^∞ 函数** $\varphi(x)$ の空間とよぶ．例えば $\varphi(x)=\exp(-x_1^2-\cdots-x_n^2)$ がその例である．$(\mathfrak{D}_{R^n})\subseteqq(\mathfrak{S}_{R^n})$ であり，かつ

$$\left.\begin{array}{l}\text{任意の多項式 } P(x)=P(x_1,\cdots,x_n) \text{ に対して，} \varphi(x)\in(\mathfrak{S}_{R^n}) \text{ ならば} \\ P(x)D^p\varphi(x)\in(\mathfrak{S}_{R^n}). \text{ また } \varphi_1,\varphi_2\in(\mathfrak{S}_{R^n}) \text{ ならば } \varphi_1(x)\varphi_2(x)\in(\mathfrak{S}_{R^n})\end{array}\right\} \tag{10·2}$$

定理 10·1　$\varphi(x)\in(\mathfrak{S}_x)$ ならば φ の Fourier 変換

$$\psi(y)=\int_{R^n}\varphi(x)\exp(-2\pi\sqrt{-1}\,x\cdot y)dx \tag{10·3}$$

は $(\mathfrak{S}_y)$ に属し，かつ $D^{(p)}=\partial^{p_1+\cdots+p_n}/\partial x_1^{p_1}\cdots\partial x_n^{p_n}$ に対して

$$D_y^{(p)}\psi(y)=\int_{R^n}\varphi(x)\cdot\left[\prod_{i=1}^n(-2\pi\sqrt{-1}\,x_i)^{p_i}\right]\exp(-2\pi\sqrt{-1}\,x\cdot y)dy \tag{10·4}$$

$$\left[\prod_{i=1}^n(2\pi\sqrt{-1}\,y_i)^{p_i}\right]\psi(y)=\int_{R^n}D_x^{(p)}\varphi(x)\cdot\exp(-2\pi\sqrt{-1}\,x\cdot y)dy \tag{10·5}$$

（証明）　$|\exp(-2\pi\sqrt{-1}\,x\cdot y)|=1$ と (10·1) によって (10·3) が存在し

$$|\psi(y)|\leqq\int_{R^n}|\varphi(x)|dx \tag{10·6}$$

また積分記号のもとでの微分が許されて (10·4) が成り立つことは，(10·2) で $\varphi(x)[\quad]$ が $(\mathfrak{S}_x)$ に属することからわかる．次に

$$\int_{R^n}\frac{\partial\varphi(x)}{\partial x_i}\exp(-2\pi\sqrt{-1}\,x\cdot y)dx$$
$$=\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int\underset{(dx_i\text{を除く})}{dx_1\cdots dx_2}\left\{\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\partial\varphi(x)}{\partial x_i}\exp(-2\pi\sqrt{-1}\,x\cdot y)dx_i\right\},$$

における $\{\quad\}$ を部分積分してみると

$$\{\quad\}=\Big[\varphi(x)\exp(-2\pi\sqrt{-1}\,x\cdot y)\Big]_{x_i=-\infty}^{x_i=+\infty}$$
$$-\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(x)(-2\pi\sqrt{-1}\,y_i)\exp(-2\sqrt{-1}\,x\cdot y)dx_i$$

の右辺第一項は (10·1) によって 0. よって

$$(2\pi\sqrt{-1}y_i)\psi(x)=\int_{R^n}\frac{\partial\varphi(x)}{\partial x_i}\exp(-2\pi\sqrt{-1}\,x\cdot y)dy$$

が得られた. これを繰返して (10·5) が得られる.

(10·4), (10·5) および (10·6) によって

$$\left|\left[\prod_{i=1}^{n}(2\pi\sqrt{-1}\,y_i)^{p_i}\right]D_y^{(q)}\psi(y)\right|$$

$$\leqq\int_{R^n}\left|D_x^{(p)}\varphi(x)\cdot\left[\prod_{i=1}^{n}(-2\pi\sqrt{-1}\,x_i)^{q_i}\right]\right|dx \qquad (10\cdot6)'$$

この右辺は $\varphi(x)\epsilon(\mathfrak{S}_x)$ と (10·1) とによって収束する.

以上から $\psi(y)\epsilon(\mathfrak{S}_y)$ でなければならないことがわかった. (終)

例

$$\int_{R^n}\exp(-\pi|x|^2)\exp(-2\pi\sqrt{-1}\,x\cdot y)dx=\exp(-\pi|y|^2) \qquad (10\cdot7)$$

(証明) t, s を実数として

$$\int_{-\infty}^{\infty}\exp(-\pi t^2)\exp(-2\pi\sqrt{-1}\,ts)dt=\exp(-\pi s^2) \qquad (10\cdot7)'$$

を証明すればよい. ところが右辺は $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-\pi)^k s^{2k}}{k!}$ であるから, 左辺を $\psi(s)$ とおいて

$$\left(\frac{d^m\psi(s)}{ds^m}\right)_{s=0}=\int_{-\infty}^{\infty}(-2\pi\sqrt{-1}\,t)^m\exp(-\pi t^2)dt$$

$$=\begin{cases}\dfrac{(-\pi)^k(2k)!}{k!}, & m=2k \text{ のとき}\\[2ex] 0\quad, & m=\text{奇数のとき}\end{cases}$$

をいうとよい. m=奇数ならば奇函数の積分で 0 であるから結局

$$\int_{-\infty}^{\infty}(2\pi t)^{2k}\exp(-\pi t^2)dt=\pi^k\frac{(2k)!}{k!}$$

をいうとよいが, これの成り立つことは, よく知られた積分

$$\int_{-\infty}^{\infty}\exp(-\beta\pi t^2)dt=\sqrt{\beta}, \qquad \beta>0,$$

の両辺を β について k 回微分して $\beta=1$ とおくとわかる，

$\varphi(x)\in(\mathfrak{S}_x)$ の Fourier 変換を

$$(\mathfrak{F}\varphi)(y)=\psi(y)=\int_{R^n}\varphi(x)\exp(-2\pi\sqrt{-1}\,x\cdot y)dx \tag{10·8}$$

と書き，**共役 Fourier 変換**とよばれる．

$$(\mathfrak{F}^*\psi)(x)=\varphi(x)=\int_{R^n}\psi(y)\exp(2\pi\sqrt{-1}\,y\cdot x)dy,\quad \psi(y)\in(\mathfrak{S}_y), \tag{10·8}'$$

をもあわせ考えることにする．

$$(\mathfrak{F}^*\psi)(x)=(\mathfrak{F}\psi)(-x) \tag{10·9}$$

であるから

$$D_x^{(p)}\varphi(x)=\int_{R^n}\psi(y)\left[\prod_{i=1}^n(2\pi\sqrt{-1}\,y_i)^{p_i}\right]\exp(2\pi\sqrt{-1}\,y\cdot x)dy \tag{10·4}'$$

$$\left[\prod_{i=1}^n(-2\pi\sqrt{-1}\,x_i)^{p_i}\right]\varphi(x)=\int_{R^n}D_y^{(p)}\psi(y)\exp(2\pi\sqrt{-1}\,y\cdot x)dy \tag{10·5'}$$

が成り立つわけである．

定理 10·2 Fourier 変換 $\mathfrak{F}$ と共役 Fourier 変換 $\mathfrak{F}^*$ とは互に他の逆変換になっている．すなわち

$$\mathfrak{F}^*(\mathfrak{F}\varphi)(x)=\varphi(x),\qquad \varphi(x)\in(\mathfrak{S}_x) \tag{10·10}$$

$$\mathfrak{F}(\mathfrak{F}^*\psi)(y)=\psi(y),\qquad \psi(y)\in(\mathfrak{S}_y) \tag{10·10}'$$

（証明）

$$\lim_{k\to\infty}\left[\lim_{m\to\infty}\int_{\substack{-k\leqq y_i\leqq k\\(i=1,2,\cdots,n)}}\left\{\int_{\substack{-m\leqq z_j\leqq m\\(j=1,2,\cdots,n)}}\varphi(z)\exp(-2\pi\sqrt{-1}\,z\cdot y)\,dz\right\}\right.$$
$$\left.\times\exp(2\pi\sqrt{-1}\,y\cdot x)dy=\varphi(x)\right]$$

を証明すればよい．積分順序を交換して

$$[\qquad]=\int_{R^n}\varphi(z)\cdot\left\{\int_{\substack{-k\leqq y_i\leqq k\\(i=1,2,\cdots,n)}}\exp(2\pi\sqrt{-1}\,y\cdot(x-z))\,dy\right\}dz$$

$$=\int_{R^n}\varphi(z)\prod_{i=1}^{n}\frac{\sin 2k\pi(x_i-z_i)}{\pi(x_i-z_i)}dz_1\cdots dz_n$$

$$=\int_{R^n}\varphi(x-w)\prod_{i=1}^{n}\frac{\sin 2k\pi w_i}{\pi w_i}dw_1\cdots dw_n$$

左辺の $k\to\infty$ なる極限が存在して $\mathfrak{F}^*(\mathfrak{F}\varphi)(x)$ に等しいのだから，

$$\mathfrak{F}^*(\mathfrak{F}\varphi)(x)=\lim_{k\to\infty}\left[\frac{1}{k}\int_0^k dk'\int_{R^n}\varphi(x-w)\prod_{i=1}^{n}\frac{\sin 2k'\pi w_i}{\pi w_i}dw_i\cdots dw_n\right]$$

$$=\lim_{k\to\infty}\int_{R^n}\varphi(x-w)\prod_{i=1}^{n}\frac{\sin^2 k\pi w_i}{k\pi^2 w_i^2}dw_1\cdots dw_n$$

$$=\lim_{k\to\infty}\int_{R^n}\left\{\varphi\left(x-\frac{u}{k}\right)\prod_{i=1}^{n}\frac{\sin^2\pi u_i}{\pi^2 u_i^2}\right\}du_1\cdots du_n$$

$$=\int_{R^n}\varphi(x)\prod_{i=1}^{n}\frac{\sin^2\pi u_i}{\pi^2 u_i^2}du_1\cdots du_n=\varphi(x)$$

となる．$|\varphi(x)|$ が有界で，$\displaystyle\int_{R^n}\prod_{i=1}^{n}\frac{\sin^2\pi u_i}{\pi^2 u_i^2}du_1\cdots du_n=1$[1] であるから

$$\lim_{k\to\infty}\int_{R^n}\{\quad\}=\int_{R^n}\lim_{k\to\infty}\{\quad\}$$

のごとく lim と $\int$ とを交換できるのである．（終）

$(\mathfrak{S}_{R^n})$ **における畳込み．** これについて次の定理が成り立つ．

定理 10·3　$(\mathfrak{S}_{R^n})$ の函数 $\varphi_1(x)$ と $\varphi_2(x)$ との畳み込み

$$\varphi_3(x)=\varphi_1*\varphi_2(x)=\int_{R^n}\varphi_1(x-y)\varphi_2(y)dy \tag{10·11}$$

は $(\mathfrak{S}_{R^n})$ に属し，かつ

$$\mathfrak{F}(\varphi_1*\varphi_2)(y)=(\mathfrak{F}\varphi_1)(y)\times(\mathfrak{F}\varphi_2)(y) \tag{10·11$'$}$$

が成り立つ．

（証明）　まず (10·1) によって $\varphi(x-y)$ が (x,y) の函数として一様連続なことがわかるから，$|\varphi_2(y)|$ が有界なことから (10·11) が存在して $\varphi_3(x)$ が連続なことがわかる．再び (10·1) によって $D_x^{(p)}\varphi_1(x-y)$ が (x,y) の函数として一様連続であるから，$|\varphi_2(y)|$ の有界なことを用い

1) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2dx=\pi$ による．

$$D_x^{(p)}\varphi_3(x)=\int_{R^n} D_x^{(p)}\varphi_1(x-y)\cdot\varphi_2(y)dy$$

すなわち $\varphi_3(x)$ は C^∞ である．(10・1) から，任意の多項式 $P(x)$ に対して

$$|P(x)D_x^{(p)}\varphi_3(x)|\leqq\int_{R^n}\frac{|P(x)|C_k}{1+|x-y|^k}\cdot|\varphi_2(y)|dy$$

なるごとき正数 C_k が存在する．$|\varphi_2(y)|$ が有界であるから，$k>0$ を十分大きくとって $|x|\to\infty$ ならしめると，右辺したがって左辺が 0 に収束し $\varphi_3(x)\in(\mathfrak{S}_x)$ である．

次に Fubini の定理で積分順序を変更し

$$\mathfrak{F}(\varphi_1*\varphi_2)(y)=\int_{R^n}\left\{\int_{R^n}\varphi_1(x-z)\varphi_2(z)dz\right\}\exp(-2\pi\sqrt{-1}\,x\cdot y)dx$$

$$=\int_{R^n}\left\{\int_{R^n}\varphi_1(x-z)\exp(-2\pi\sqrt{-1}\,(x-z)\cdot y)dx\right.$$

$$\left.\times\varphi_2(z)\exp(-2\pi\sqrt{-1}\,z\cdot y)dz\right.$$

とできるが，dx を $d(x-z)$ として (10・11)′ を得る．(終)

系

$$\left.\begin{aligned}\int_{R^n}|(\mathfrak{F}\varphi)(y)|^2dy&=\int_{R^n}|\varphi(x)|^2dx,\\ \int_{R^n}|(\mathfrak{F}^*\psi)(x)|^2dx&=\int_{R^n}|\psi(y)|^2dy\end{aligned}\right\}\tag{10・12}$$

(証明) (10・11)′ と (10・10) によって

$$\varphi_1*\varphi_2(x)=\mathfrak{F}^*(\mathfrak{F}\varphi_1\times\mathfrak{F}\varphi_2)(x)$$

$x=0$ として

$$\int_{R^n}\varphi_1(-z)\varphi_2(z)dz=\int_{R^n}(\mathfrak{F}\varphi_1)(y)\times(\mathfrak{F}\varphi_2)(y)dy\tag{10・13}$$

いま $\varphi_2(z)$ として

$$\varphi_1^*(z)=\overline{\varphi_1(-z)}\tag{10・14}$$

をとると

$$(\mathfrak{F}\varphi_1^*)(y)=\int_{R^n}\overline{\varphi_1(-z)}\exp(-2\pi\sqrt{-1}\,z\cdot y)dz=\overline{(\mathfrak{F}\varphi_1)(y)}\tag{10・15}$$

であるから，(10·13) から (10·12) の初めの式を得る．後の式についても同様にして証明される．(終)

10·2 Plancherel の定理

まず，次の定理を証明する．

定理 10·4 $(\mathfrak{S}_{R^n})$ は Hilbert 空間 $L_2(R^n)$ において $L_2(R^n)$ のノルム

$$\|f\|_{R^n}=\left(\int_{R^n}|f(x)|^2dx\right)^{1/2} \tag{10·16}$$

の意味で稠密である．

(証明) 任意の $f(x)\in L_2(R^n)$ と $\varepsilon>0$ とに対して，Lebesgue 式積分の定義から，

$$\text{car.}(f_{\varepsilon,k}(x))\subseteqq\{x\,;\,|x|\leqq k\} \text{ かつ } \|f-f_{\varepsilon,k}\|_{R^n}\leqq\varepsilon$$

となるような連続函数 $f_{\varepsilon,k}(x)$ と正整数 k とがとれる．$\beta_h(x)\in(\mathfrak{D}_{R^n})$ を

$$|x|\geqq h^{-1} \text{ で } \beta_h(x)\equiv 0,\ \beta_h(x)\geqq 0 \text{ かつ } \int_{R^n}\beta_h(x)dx=1$$

なるようにとって，$f_{\varepsilon,k}(x)$ の $\beta_h(x)$ による正則化

$$f_{\varepsilon,k,h}(x)=\int_{R^n}\beta_h(x-y)f_{\varepsilon,k}(y)dy\text{同}$$

をつくれば，定理 5·4 の証明中におけると同じく，$f_{\varepsilon,k,h}(x)\in(\mathfrak{D}_{R^n})\subseteqq(\mathfrak{S}_{R^n})$ であり

$$\left.\begin{aligned}&\text{car.}(f_{\varepsilon,k,h})\subseteqq\{|x|\,;\,|x|\leqq k+h^{-1}\leqq k+1\} \text{ かつ}\\&\lim_{h\to\infty}f_{\varepsilon,k,h}(x)=f_{\varepsilon,k}(x) \quad (\text{一様収束})\end{aligned}\right\}$$

の成り立つことがわかる．故に $\lim_{h\to\infty}\|f_{\varepsilon,k}-f_{\varepsilon,k,h}\|_{R^n}=0$ で，三角不等式

$$\|f-f_{\varepsilon,k,h}\|_{R^n}\leqq\|f-f_{\varepsilon,k}\|_{R^n}+\|f_{\varepsilon,k}-f_{\varepsilon,k,h}\|_{R^n}$$

が成り立つから，$(\mathfrak{D}_{R^n})$ したがって $(\mathfrak{S}_{R^n})$ が $\|\ \|_{R^n}$ の意味で $L_2(R^n)$ において稠密である．(終)

定理 10·5 各 $f(x)\in L_2(R^n)$ に対して

$$\int_{|x|\leqq m}f(x)\exp(-2\pi\sqrt{-1}\,x\cdot y)dx=g_m(y)$$

を定義すると，$m\to\infty$ なるとき g_m はノルム $\|\ \|_{R^n}$ の意味で収束する．この極限を

$$(\mathfrak{F}f)(y)=\underset{m\to\infty}{\mathrm{l.\,i.\,m.}}\int_{|x|\leq m} f(x)\exp(-2\pi\sqrt{-1}\,x\cdot y)dx \qquad (10\cdot17)$$

と書いて $f(x)\in L_2(R)$ の Fourier 変換とよぶことにすると，$\mathfrak{F}$ は $L_2(R^n)$ を $L_2(R^n)$ 全体に 1 対 1 に写し，かつ

$$\left.\begin{aligned}&\mathfrak{F}(\alpha_1f_1+\alpha_2f_2)=\alpha_1\mathfrak{F}(f_1)+\alpha_2\mathfrak{F}(f_2) && (\text{加法的})\\ &\|\mathfrak{F}f\|_{R^n}=\|f\|_{R^n} && (\text{等距離的})\end{aligned}\right\} \qquad (10\cdot18)$$

が成り立つ．すなわち $\mathfrak{F}$ は **ユニタリ作用素** (unitary operator) である．同様にしてユニタリ作用素

$$(\mathfrak{F}^*g)(x)=\underset{m\to\infty}{\mathrm{l.\,i.\,m.}}\int_{|y|\leq m} g(y)\exp(2\pi\sqrt{-1}\,y\cdot x)dy \qquad (10\cdot17)'$$

も定義されるが，$\mathfrak{F}^*$ と $\mathfrak{F}$ とは互に逆作用素である：

$$\mathfrak{F}^*(\mathfrak{F}f)=f, \qquad \mathfrak{F}(\mathfrak{F}^*g)=g \qquad (10\cdot19)$$

[Plancherel の定理]

（証明）　任意の $f(x)\in L^2(R^n)$ に対して $\lim_{m\to\infty}\|f-\varphi_m\|=0$ なる $\varphi_m(x)\in(\mathfrak{S}_{R^n})$ を選ぶ．(10·9) によって

$$\|\mathfrak{F}\varphi_m-\mathfrak{F}\varphi_k\|=\|\varphi_m-\varphi_k\|$$

この右辺は $\leq\|\varphi_m-f\|+\|f-\varphi_k\|$ で $m,k\to\infty$ とともに 0 に収束するから $\{\mathfrak{F}\varphi_m\}$ は $L_2(R)$ において Cauchy の収束条件 $\lim_{m,k\to\infty}\|\mathfrak{F}\varphi_m-\mathfrak{F}\varphi_k\|=0$ を満足し，したがって，$L_2(R^n)$ の完備性から，$\lim_{m\to\infty}\|\mathfrak{F}\varphi_m-f_\infty\|=0$ なる $f_\infty\in L_2(R^n)$ が定まる．この f_∞ が，f を近似する $\{\varphi_m\}$ に無関係に，f のみによって定まることは，$\lim_{m\to\infty}\|f-\tilde{\varphi}_m\|=0$, $\tilde{\varphi}_m\in(\mathfrak{S}_{R^n})$ とすると (10·9) によって

$$\|\mathfrak{F}\varphi_m-\mathfrak{F}\tilde{\varphi}_m\|_{R^n}=\|\varphi_m-\tilde{\varphi}_m\|_{R^n}\to 0 \quad (m\to\infty)$$

となることからわかる．よって上の f_∞ を $\mathfrak{F}f$ と書いても差支えあるまい．

すなわち $L_2(R^n)$ の稠密な部分空間 $(\mathfrak{S}_{R^n})$ で定義せられた $\mathfrak{F}$ を，ノルム $\|\ \|_{R^n}$ に関する $\mathfrak{F}$ の連続性[1]を用いて $L_2(R)$ の全体に拡張したわけである．

1)　(10·12)によって $\|\mathfrak{F}\varphi\|_{R^n}=\|\varphi\|_{R^n}$, $\varphi\in(\mathfrak{S}_{R^n})$，だから $\|\varphi\|_{R^n}\to0$ ならば $\|\mathfrak{F}\varphi\|_{R^n}\to0$.

同じく $\mathfrak{F}^*$ を $L_2(R^n)$ の全体に拡張することもできるわけで，(10·10), (10·10)′ と (10·12) から

$$\mathfrak{F}^*(\mathfrak{F}f)=f, \qquad \mathfrak{F}(\mathfrak{F}^*g)=g$$
$$\|\mathfrak{F}f\|_{R^n}=\|f\|_{R^n}, \qquad \|\mathfrak{F}^*g\|_{R^n}=\|g\|_{R^n}$$

の成り立つことは明らかである．よって $\mathfrak{F}, \mathfrak{F}^*$ はユニタリ作用素でかつ互に他の逆作用素になっている．

上に得た拡張 $\mathfrak{F}$ が (10·17) で与えられることを示せば定理の証明を終ったことになる．そのために $f_m(x)\in L_2(R^n)$ を

$$f_m(x)=\begin{cases} f(x), & |x|\leqq m \text{ のとき} \\ 0\ , & |x|>m \text{ のとき} \end{cases}$$

によって定義すると明らかに，$\lim_{m\to\infty}\|f-f_m\|=0$. よって $\mathfrak{F}$ の連続性によって

$$(\mathfrak{F}f)(y)=\underset{m\to\infty}{\mathrm{l.i.m.}}\,(\mathfrak{F}f_m)(y)$$

だから結局

$$(\mathfrak{F}f_m)=\int_{R^n} f_m(x)\exp(-2\pi\sqrt{-1}\,x\cdot y)dx$$
$$=\int_{|x|\leqq m} f(x)\exp(-2\pi\sqrt{-1}\,x\cdot y)dx \qquad (10\cdot20)$$

を証明すればよい．

$f_m(x)$ を前定理における $f(x)$ の代りにとって，$\varphi_h(x)\in(\mathfrak{S}_{R^n})$ を

$$\mathrm{car.}(\varphi_h)\subseteqq\{x\,;\,|x|\leqq 2m\}, \quad \lim_{h\to\infty}\|f_m-\varphi_h\|_{R^n}=0$$

なるように選ぶことができる．$\mathrm{car.}(f_m)\subseteqq\{x\,;\,|x|\leqq m\}$ であるからである．故に $\mathfrak{F}$ の等距離性から

$$\|\mathfrak{F}f_m-\mathfrak{F}\varphi_h\|=\|f_m-\varphi_h\|\to 0 \quad (h\to 0) \qquad (10\cdot21)$$

である．一方において Schwarz の不等式で $|\exp(-2\pi\sqrt{-1}\,x\cdot y)|=1$, を用い

$$\left|\int_{R^n} f_m(x)\exp(-2\pi\sqrt{-1}\,x\cdot y)dx-\int_{R^n}\varphi_h(x)\exp(-2\pi\sqrt{-1}\,x\cdot y)dx\right|$$

$$\leqq \int_{R^n} |f_m(x)-\varphi_h(x)|dx=\int_{|x|\leqq 2m} |f(x)-\varphi_h(x)|dx$$

$$\leqq\left(\int_{|x|\leqq 2m} dx\right)^{1/2}\cdot\|f_m-\varphi_h\|_{R^n}\to 0 \quad (h\to 0)$$

である．よって

$$\lim_{h\to\infty}(\mathfrak{F}\varphi_h)(y)=\lim_{h\to\infty}\int_{R^n}\varphi_h(x)\exp(-2\pi\sqrt{-1}\,x\cdot y)dx$$

$$=\int_{R^n} f_m(x)\exp(-2\pi\sqrt{-1}\,x\cdot y)dx$$

ところが (10・21) によって $\underset{h\to\infty}{\mathrm{l.i.m.}}(\mathfrak{F}\varphi_h)(y)=(\mathfrak{F}f_m)(y)$ であるから，$L_2(R^n)$ の完備性の証明（附録）と同様にして適当な部分列 $\{h'\}$ に対して

殆んどすべての y に対して $\lim_{h\to\infty}(\mathfrak{F}\varphi_{h'})(y)=(\mathfrak{F}f_m)(y)$

が成り立つ．よって

殆んどすべての y に対して

$$\int_{R^n} f_m(x)\exp(-2\pi\sqrt{-1}\,x\cdot y)dx=(\mathfrak{F}f_m)(y) \qquad (終)$$

系 1　$\mathfrak{F}^4=I$ すなわち $\mathfrak{F}^4(f)(x)=f(x)$

（証明）函数 g の**対称** (symmetry) $\check{g}$ を $\check{g}(y)=g(-y)$ で定義すると (10・17) と (10・17)′ とから

$$\mathfrak{F}^*g=\mathfrak{F}\check{g} \tag{10・22}$$

が成り立つ．よって $\mathfrak{F}^*=\mathfrak{F}^{-1}$ により $\mathfrak{F}^2\check{g}=\mathfrak{F}(\mathfrak{F}\check{g})=\mathfrak{F}(\mathfrak{F}^*g)=g$，したがって $\mathfrak{F}^4\check{g}=\check{g}$ を得て

$$\mathfrak{F}^4=I, \qquad 同じく\ (\mathfrak{F}^*)^4=I^{1)} \tag{10・23}$$

系 2　$g_1=\mathfrak{F}f_1,\ g_2=\mathfrak{F}f_2$ とすると

$$\left.\begin{aligned}\int_{R^n} f_1(x)\bar{f}_2(x)dx&=\int_{R^n} g_1(y)\bar{g}_2(y)dy\\ \int_{R^n} f_1(x)f_2(x)dx&=\int_{R^n} g_1(y)g_2(-y)dy\end{aligned}\right\} \tag{10・24}$$

[Parseval の公式]

1)　I は恒等作用素：$If=f$.

(証明) $\mathfrak{R}$ をもって実数部分を表わすことにすると，内積

$$(u, v)_{R^n}=\int_{R^n} u(x)\overline{v(x)}dx \tag{10·25}$$

について

$$4\mathfrak{R}(u, v)_{R^n}=\|u+v\|^2_{R^n}-\|u-v\|^2_{R^n} \tag{10·26}$$

が成り立つ．よって $\mathfrak{F}$ の等距離性から

$$4\mathfrak{R}(\mathfrak{F}f_1, \mathfrak{F}f_2)_{R^n}=4\mathfrak{R}(f_1, f_2)_{R^n}$$

f_1 を $\sqrt{-1}f_1$ として，虚数部分についても

$$4\mathfrak{Im}(\mathfrak{F}f_1, \mathfrak{F}f_2)_{R^n}=4\mathfrak{Im}(f_1, f_2)_{R^n}$$

故に $(\mathfrak{F}f_1, \mathfrak{F}f_2)_{R^n}=(f_1, f_2)_{R^n}$ すなわち $(g_1, g_2)_{R^n}=(f_1, f_2)_{R^n}$. これは(10·21)の初めの式に他ならない．あとの式は (10·14) から得る．

$$(\mathfrak{F}\bar{f}_2)(y)=\overline{g_2(-y)} \tag{10·27}$$

を使えば初めの式に帰着される．

10·3 $(\mathfrak{D}_{R^n})$ に属する函数の Fourier 変換・Paley–Wiener の定理

$(\mathfrak{S}_{R^n})=(\mathfrak{S}_x)$ に属する函数の Fourier 変換は $(\mathfrak{S}_y)$ に属する．$(\mathfrak{D}_{R^n})=(\mathfrak{D}_x)$ は $(\mathfrak{S}_x)$ の部分集合であるから，$(\mathfrak{D}_x)$ に属する函数の Fourier 変換は $(\mathfrak{S}_y)$ の中で特別な類をつくっているに違いない．この類を特徴づけるのが Paley–Wiener の定理である．これを説明するために

指数型の整函数の定義 $z=(z_1, z_2, \cdots, z_n)$ の各成分 $z_1, z_2, \cdots, z_n$ はすべて複素数とし，$F(z)=F(z_1, z_2, \cdots, z_n)$ が**整函数** (entire function) であるとする．すなわち複素数値函数 $F(z)$ が $|z_1|<\infty, |z_2|<\infty, \cdots, |z_n|<\infty$ において一価正則とする．このとき，もし

$$\overline{\lim_{|z|\to\infty}}\frac{\log|F(z)|}{|z|}\leqq 2\pi C, \text{ ただし } |z|=|z_1|+|z_2|+\cdots+|z_n| \tag{10·28}$$

ならば，$F(z)$ は**指数型** $\leqq 2\pi C$ (exponential type $\leqq 2\pi C$) であるという．

Paley–Wiener の定理は次の形に述べられる．

定理 10·6 急減少な函数 $f(x)$ に対して次の二つの条件は同等である：

（Ⅰ）$f(x)$ の Fourier 変換 $\varphi(y)=(\mathfrak{F}^*f)(y)$ が $(\mathfrak{D}_y)$ に属し，かつその台が

$$|y_1|\leqq C,\ |y_2|\leqq C, \cdots, |y_n|\leqq C$$

に含まれる．

（Ⅱ）指数型 $\leqq 2\pi C$ の整函数 $F(z)$ が存在して $f(x)=F(x)$ である．

[**Paley–Wiener の定理**]

注　$(\mathfrak{D}_y)$ に属する函数 $\varphi(y)$ の Fourier 変換 $(\mathfrak{F}\varphi)(x)=f(x)$ として得られるような $f(x)\in(\mathfrak{S}_x)$ の全体は，z の指数型整函数 $F(z)$ において複素数 $z=(z_1, z_2, \cdots, z_n)$を実数 $x=(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ でおきかえたものの全体と一致する．

（証明）簡単のために $n=1$ の場合だけを証明する．一般の n に対しても同様にして証明される．

（Ⅰ)→(Ⅱ）：仮定によって

$$f(x)=(\mathfrak{F}\mathfrak{F}^*f)(x)=(\mathfrak{F}\varphi)(x)=\int_{-C}^{C}\varphi(y)\exp(-2\pi\sqrt{-1}\,yx)dy.$$

$z=x+\sqrt{-1}\xi$ として

$$F(z)=\int_{-C}^{C}\varphi(y)\exp(-2\pi\sqrt{-1}\,yz)dy$$

が z の整函数であることは，すべての z に対して

$$\frac{dF(z)}{dz}=\int_{-C}^{C}\varphi(y)\frac{\partial}{\partial z}\exp(-2\pi\sqrt{-1}\,yz)dy$$
$$=\int_{-C}^{C}-\varphi(y)2\pi\sqrt{-1}\,y\exp(-2\pi\sqrt{-1}\,yz)dy$$

のごとく微分可能なことからわかる．また指数型 $\leqq 2\pi C$ であることは

$$|F(z)|\leqq\int_{-C}^{C}|\varphi(y)|\exp(+2\pi y\xi)dy\leqq\exp(2\pi|\xi|\cdot C)\int_{-C}^{C}|\varphi(y)|dy$$
$$\leqq\exp(2\pi C|z|)\cdot\int_{-C}^{C}\varphi(y)dy$$

からわかる．$F(x)=f(x)$ であるから（Ⅱ）がいえたわけである．

（Ⅱ)→(Ⅰ）：ここで Phragmen–Lindelöf の定理と称せられる次の定理を使う．この定理の証明は次の § において与える．

定理 10·7　$F(z)$ を指数型 $\leqq 2\pi C$ の整函数で $F(x)=f(x)$ が急減少な函数であるとする．このとき任意の $\varepsilon>0$ に対して

$\mathfrak{I}(z)\geqq 0$[1] ならば $z=r\exp(\sqrt{-1}\theta)$ として

$$|z^k F(z)|\leqq \exp(2\pi(C+\varepsilon)\mathfrak{I}(z))\cdot \sup_{\theta=0\ \text{および}\ \theta=\pi/2}|z^k F(z)\exp(2\pi(C+\varepsilon)\sqrt{-1}z)| \tag{10·29}$$

[Phragmen-Lindelöf の定理]

さて，Parseval の公式 (10·24) によって，任意の $\gamma(y)\epsilon(\mathfrak{D}_y)$ に対し

$$\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(y)\gamma(y)dy=\int_{-\infty}^{\infty}f(x)g(-x)dx,\quad g(x)=(\mathfrak{F}\gamma)(x)$$

よって car. (φ) が閉区間 $[-C, C]$ に含まれることをいうためには，car. (γ) が $(-\infty, -C-\varepsilon]$ または $[C+\varepsilon, \infty)$ またはこれら二つの区間の和集合に含まれるときに，$\int_{-\infty}^{\infty}f(x)g(-x)dx=0$ であることがいえるとよい，ここに ε は任意の定数 >0 とする．

故に一般性を失わないで

$$\left.\begin{array}{l}\text{car.}(\gamma)\ \text{が}\ [C+\varepsilon, B]\ (\varepsilon>0, B>C+\varepsilon\ \text{とする})\ \text{に含まれるとき}\\ \text{つねに}\ \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}f(x)g(-x)dx=0\ \ (g(x)=(\mathfrak{F}\gamma)(x)\end{array}\right\}$$

の成り立つことがいえるとよい．

ところが (I) から (II) を導いたと同様にして $g(-x)$ は整函数

$$G(-z)=\int_{C+\varepsilon}^{B}\gamma(y)\exp(+2\pi\sqrt{-1}\,yz)dy,\quad z=x+\sqrt{-1}\xi$$

に拡張される，よって

$$\left.\begin{array}{l}\mathfrak{I}(z)=\xi\geqq 0\ \text{なるとき}\ |G(-z)|\leqq \displaystyle\int_{C+\varepsilon}^{B}\exp(-2\pi\xi y)\cdot|\gamma(y)|dy\\ \qquad\leqq M\cdot\exp(-2\pi(C+\varepsilon)\xi),\quad M=\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}|\gamma(y)|dy\end{array}\right\} \tag{10·30}$$

一方において $\delta>0$ とすると定理 10·7 によって $(h=0, 1, 2, \cdots)$

1) $\mathfrak{I}(z), \mathfrak{R}(z)$ は z の虚数部，実数部を示す．

$$\left.\begin{array}{l}\Im(z)\geqq 0 \text{ なるとき } |z^h F(z)|\leqq \exp(2\pi(C+\delta)\Im(z))\times \\ \qquad \sup\limits_{\substack{\Im(z)\text{が}\Re(z)=0\\ \text{および } \Im(z)=0}} |z^h F(z)\exp(2\pi(C+\delta)\sqrt{-1}\,z)\end{array}\right\} \quad (10\cdot 31)$$

が成り立つ．$F(z)G(-z)$ を，4つの点

$$(-k,0),(k,0),(k,\xi),(-k,\xi),(-k,0)$$

を順次に直線で結んだ積分路について積分して Cauchy の積分定理から

$$\int F(z)G(-z)dz=0.$$

ところが (10・30) と $h=2$ とした (10・31) とがあるから，$k\to\infty$ なるとき

$$\int_{(-k,\xi)}^{(-k,0)} F(z)G(-z)dz\to 0,\quad \int_{(k,0)}^{(k,\xi)} F(z)G(-z)dz\to 0$$

となり，

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)g(-x)dx=\int_{-\infty}^{\infty} F(x+\sqrt{-1}\,\xi)G(-x-\sqrt{-1}\,\xi)dx,$$
$$\xi=\Im(z)\geqq 0.$$

よって　$\delta=\varepsilon/2$　として，(10・30) と $h=2$ とした (10・31) を用い，$z=r\exp(\sqrt{-1}\,\theta)$ として

$$\left|\int_{-\infty}^{\infty} f(x)g(-x)dx\right|\leqq \exp\left(-2\pi\cdot\frac{\varepsilon}{2}\xi\right)M\int_{-\infty}^{\infty}|x+\sqrt{-1}\,\xi|^{-2}\cdot dx$$
$$\times\left\{\sup_{\theta=0 \text{ および } \theta=\pi/2}\left|z^2F(z)\exp\left(2\pi\left(C+\frac{\varepsilon}{2}\right)\sqrt{-1}\,z\right)\right|\right\} \qquad (10\cdot 32)$$

$x^2F(x)=x^2f(x)$ は $f(x)$ が急減少という仮定から $-\infty<x<\infty$ で有界，また $F(z)$ が指数型 $\leqq 2\pi C$ ということから，$\Im(z)=\xi\geqq 0$ ならば $\xi\to\infty$ なるとき　$\left|-\xi^2F(\sqrt{-1}\,\xi)\exp\left(-2\pi\left(C+\frac{\varepsilon}{2}\right)\xi\right)\right|$

$$\leqq O\left(\xi^2\exp(2\pi C\xi)\exp\left(-2\pi\left(C+\frac{\varepsilon}{2}\right)\xi\right)\right)$$

の右辺は有界である．

故に (10・32) において $\xi\to\infty$ ならしめて $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)g(-x)dx=0.$ (終)

10・4　Phragmen–Lindelöf の定理の証明

$z^kF(z)$ は $F(z)$ とともに指数型 $\leqq 2\pi C$ であり，かつ $x^kf(x)$ は $f(x)$ とともに急減少である．よって $F(z)$ の代りに $z^kF(z)$ をとることにして，$k=0$

の場合の (10·29) を証明すればよい,

$$F_1(z)=F(z)\exp(2\pi(C+\varepsilon)\sqrt{-1}\,z)$$

は z が実軸の上にあるとき有界 ($|F_1(z)|\leqq|f(x)|\exp(2\pi(C+\varepsilon)\sqrt{-1}\,x)$),

また z が純虚数 $\xi\geqq 0$ であれば $\xi\to\infty$ なるとき

$$|F_1(\sqrt{-1}\,\xi)|\leqq O(\exp(2\pi C\xi+\varepsilon/2)\cdot\exp(-2\pi(C+\varepsilon)\xi))$$
$$=O(\exp(-\pi\varepsilon\xi))$$

で左辺は有界である. よって任意の $\delta>0$ に対して

$$F_2(z)=F_1(z)\exp\left(-\delta\left[z\cdot\exp\left(\frac{-1}{4}\sqrt{-1}\,\pi\right)\right]^{3/2}\right)$$

を考えると, z が第一象限にあるとき, すなわち $z=r\exp(\sqrt{-1}\,\theta)$ とし $0\leqq\theta\leqq\pi/2$ なるとき

$$|F_2(z)|=|F_1(z)|\cdot\exp\left(-\delta r^{3/2}\cos\left(\frac{3}{2}\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)\right)\right)$$
$$\leqq|F_1(z)|\exp\left(-\delta r^{3/2}\cos\frac{3}{8}\pi\right)$$

の最右辺は, $r\to\infty$ なるとき 0 に収束する. $F_1(z)$ が指数型であるからである. また真中の項の第二因子は $\theta=0,\theta=\pi/2$ に対して $\leqq 1$.

正則函数 $F_2(z)$ に対して $|F_2(z)|$ の, 領域:

$$0\leqq r\leqq r_0,\quad 0\leqq\theta\leqq\frac{\pi}{2}\quad(z=r\exp(\sqrt{-1}\,\theta)\text{ とする})$$

における最大値は境界 $\theta=0$ または $\theta=\pi/2$ または $r=r_0$ の上でとられるが, $r_0\to\infty$ ならしめると $r=r_0$ でとる $|F_2(z)|$ の最大値は $\to 0$ であるから

$$\left.\begin{array}{l} z=r\exp(\sqrt{-1}\,\theta)\text{ とし領域 }0\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{2}\text{ において} \\ \sup|F_2(r\cdot\exp(\sqrt{-1}\,\theta))|\leqq\displaystyle\sup_{\theta=0\text{ および }\theta=/\pi 2}|F_2(z)| \end{array}\right\}$$

$\delta>0$ は任意であったから $\delta\downarrow 0$ ならしめて

$$\sup_{0\leqq\theta\leqq\pi/2}|F_1(r\exp(\sqrt{-1}\,\theta))|\leqq\sup_{\theta=0\text{ および }\theta=\pi/2}|F_1(r\exp(\sqrt{-1}\,\theta))|$$

同様にして $\pi\geqq\theta\geqq\pi/2$ における同じような不等式も得て (10·29) が証明されたことになる. (終)

第 11 章　緩増加な超函数の Fourier 変換

11.1　急減少な函数の空間 $(\mathfrak{S}_{R^n})$ および緩増加な超函数の空間 $(\mathfrak{S}_{R^n})'$

函数空間 $(\mathfrak{S}_{R^n})$　$(\mathfrak{S}_{R^n})$ の函数列 $\{\varphi_h(x)\}$ が,

$$\left.\begin{array}{l}\text{すべての } k\geqq 0 \text{ およびすべての } p=\{p_1,\cdots,p_n\} \text{ に対して} \\ \lim_{h\to\infty}\{\sup_{x\in R^n}(1+|x|^k)|D^{(p)}\varphi_h(x)|\}=0\end{array}\right\} \quad (11\cdot1)$$

を満足するときに $\lim_{h\to\infty}\varphi_h(x)=0$ $((\mathfrak{S}_{R^n}))$ または略して $\varphi_h(x)\Longrightarrow 0((\mathfrak{S}_{R^n}))$ と書く. また $\{\varphi_h\}\subseteqq(\mathfrak{S}_{R^n})$ と $\varphi\in(\mathfrak{S}_{R^n})$ に対して $(\varphi(x)-\varphi_h(x))\Longrightarrow 0$ $((\mathfrak{S}_{R^n}))$ なるとき $\lim_{h\to\infty}\varphi_h(x)=\varphi(x)$ $((\mathfrak{S}_{R^n}))$ または略して $\varphi_h(x)\Longrightarrow 0$ $((\mathfrak{S}_{R^n}))$ と書く. このように位相づけられた函数空間 $(\mathfrak{S}_{R^n})$ を**急減少な函数** (rapidly decreasing) の空間という.

定理 11·1

i) $\varphi_h(x)\Longrightarrow\varphi(x)$ $((\mathfrak{D}_{R^n}))$ ならば $\varphi_h(x)\Longrightarrow\varphi(x)$ $((\mathfrak{S}_{R^n}))$.

ii) $\varphi_h(x)\Longrightarrow\varphi(x)$ $((\mathfrak{S}_{R^n}))$ ではあるが, $(\mathfrak{D}_{R^n})$ の収束の意味では $\{\varphi_h(x)\}$ が収束しないような $\{\varphi_h(x)\}\subseteqq(\mathfrak{D}_{R^n})$ が存在する.

iii) 任意の $\varphi(x)\in(\mathfrak{S}_{R^n})$ に対して $\varphi_h(x)\Longrightarrow\varphi(x)$ $((\mathfrak{S}_{R^n}))$ であるような $\{\varphi_h(x)\}\subseteqq(\mathfrak{D}_{R^n})$ を選ぶことができる.

(証明) i) は明らかである. 一定のコンパクト集合 $K\subseteqq R^n$ が存在して car. $(\varphi_h)\subseteqq K$ $(h=1,2,\cdots)$ であるからである.

ii) $\alpha(x)\in(\mathfrak{D}_{R^n})$ を $|x|\leqq 1$ で $\alpha(x)=1$ なるものとする.

$$\varphi_h(x)=\alpha\left(\frac{x}{h}\right)\cdot\exp(-|x|^2) \quad (h=1,2,\cdots),$$

は $\in(\mathfrak{D}_{R^n})$ で, 求める性質をもっていることは積の微分に関する Leibniz の公式で, 容易にわかる.

iii) $\varphi(x)\in(\mathfrak{S}_{R^n})$ に対して

$$\varphi_h(x)=\alpha\left(\frac{x}{h}\right)\varphi(x)$$

をとればよい.

超函数の空間 $(\mathfrak{S}_{R^n})'$ $(\mathfrak{S}_{R^n})$ の上で定義せられた加法的汎函数 T が連続性の条件：

$$\varphi_h \Longrightarrow 0\ ((\mathfrak{S}_{R^n}))\ \text{ならば}\ T(\varphi_h)\to 0$$

を満足するならば T を**緩増加な** (slowly increasing; tempered) 超函数[1] といい，このような T の全体を $(\mathfrak{S}_{R^n})'$ で表わす．すべての $\varphi\in(\mathfrak{S}_{R^n})$ において $\lim_{h\to\infty} T(\varphi_h)=0$ なるとき，$\{T_h\}\subseteqq(\mathfrak{S}_{R^n})'$ は $(\mathfrak{S}_{R^n})'$ において0に収束するといい，$\lim_{h\to\infty} T_h=0$ $((\mathfrak{S}_{R^n})')$ または略して $T_h\Longrightarrow 0$ $((\mathfrak{S}_{R^n})')$ と書く．

超函数 $\epsilon(\mathfrak{S}_{R^n})'$ **の偏微分** $T\epsilon(\mathfrak{S}_{R^n})$ とする．$\varphi_h\Longrightarrow 0$ $((\mathfrak{S}_{R^n}))$ ならば，任意の偏微分 $D^{(p)}$ に対して，$D^{(p)}\varphi_h\Longrightarrow 0$ $((\mathfrak{S}_{R^n}))$ でもあるから T の偏微分 $D^{(p)}T$ を

$$(D^{(p)}T)(\varphi)=(-1)^{|p|}T(D^{(p)}\varphi),\qquad \varphi\epsilon(\mathfrak{S}_{R^n})'$$

によって定義すると $D^{(p)}T\epsilon(\mathfrak{S}_{R^n})'$ である．超函数 $T\epsilon(\mathfrak{D}_{R^n})'$ の場合と同じく $T\epsilon(\mathfrak{S}_{R^n})'$ は無限回偏微分可能でかつ偏微分した結果はまた $(\mathfrak{S}_{R^n})'$ に属するわけである．

定理 11・2 $(\mathfrak{S}_{R^n})'$ は $(\mathfrak{D}_{R^n})'$ の超函数のうちで，$(\mathfrak{D}_{R^n})$ を $(\mathfrak{S}_{R^n})$ における位相で考えたときにも連続であるようなものの全体と一致する．またこの条件はコンパクトな台をもつ超函数に対しては確かに満足されている．よって

$$(\mathfrak{E}_{R^n})'\subseteqq(\mathfrak{S}_{R^n})'\subseteqq(\mathfrak{D}_{R^n})'$$

（証明） $(\mathfrak{D}_{R^n})\subseteqq(\mathfrak{S}_{R^n})$ であるから，各 $T\epsilon(\mathfrak{S}_{R^n})'$ に対して

$$T(\varphi),\qquad \varphi\,\epsilon\,(\mathfrak{D}_{R^n})$$

は確かに定義される．しかも前定理の i) によって $\varphi_h\Longrightarrow 0$ $((\mathfrak{D}_{R^n}))$ ならば $T(\varphi_h)\to 0$ である．よって $T\epsilon(\mathfrak{S}_{R^n})'$ に対し普通の超函数 $T^{(1)}\epsilon(\mathfrak{D}_{R^n})'$ が

$$\varphi\epsilon(\mathfrak{S}_{R^n})\ \text{なるとき}\ T^{(1)}(\varphi)=T(\varphi) \tag{11・3}$$

によって定義される．しかもこの $T^{(1)}$ に対して (11・3) を満足するような $T\epsilon(\mathfrak{S}_{R^n})$ は，初めのもの以外にない．前定理の iii) によって $(\mathfrak{D}_{R^n})$ が

1) 緩増加という形容詞の意味は定理 11・3 によって明らかにされる．

$(\mathfrak{S}_{R^n})$ において $(\mathfrak{S}_{R^n})$ の収束の意味で稠密であるから，$(\mathfrak{S}_{R^n})'$ に属する汎函数は，その $(\mathfrak{S}_{R^n})$ の上での連続性によって，$(\mathfrak{D}_{R^n})$ の上での値によって完全に定まってしまうからである．

かくして $(\mathfrak{S}_{R^n})'$ は $(\mathfrak{D}_{R^n})'$ の部分集合と考えてよい．またコンパクトな台をもつ $T^{(1)}\epsilon(\mathfrak{D}_{R^n})'$ が $(\mathfrak{S}_{R^n})'$ に属するものと考えられることも殆んど明らかである．$\alpha(x)\epsilon(\mathfrak{D}_{R^n})$ を $T^{(1)}$ の台の上で1になる函数とすると

$$T^{(1)}(\varphi)=T^{(1)}(\alpha\varphi),\qquad \varphi\epsilon(\mathfrak{D}_{R^n})$$

であり，$\varphi_h\Longrightarrow 0\ ((\mathfrak{S}_{R^n}))$ ならば $\alpha\varphi_h\Longrightarrow 0\ ((\mathfrak{D}_{R^n}))$ であるからである．かくして $(\mathfrak{E}_{R^n})'$ は $(\mathfrak{S}_{R^n})'$ の部分集合と考えてよい．(終)

定理 11·3　$T\epsilon(\mathfrak{D}_{R^n})'$ が緩増加な超函数であるための，すなわち $T\epsilon(\mathfrak{S}_{R^n})'$ であるための必要かつ十分な条件は，R^n で有界連続函数 $f(x)$ と整数 $k\geqq 0$ とを適当にとると

$$T_{(x)}=D^{(p)}T_{(1+|x|^k)f(x)} \tag{11·4}$$

となるような $p=(p_1,p_2,\cdots,p_n)$ の存在することである．

注　R^n で C^q で，その偏導函数 $D^{(p)}f(x), |p|\leqq q$, がいずれも有界な函数に多項式を乗じた形であるような函数 $f(x)$ を，$x=\infty$ において**緩増加な C^q 函数** (slowly increasing function) という．$T\epsilon(\mathfrak{S}_{R^n})'$ なる T を緩増加な超函数とよんだのは，上の定理が成り立つことによるのである．

(証明)　十分なこと：任意の $\varphi(x)\epsilon(\mathfrak{D}_{R^n})$ に対して，(11·4) から

$$T(\varphi)=T_{(x)}(\varphi(x))=(-1)^{|p|}\int_{R^n}(1+|x|^k)f(x)D^{(p)}\varphi(x)dx$$

もしも $\{\varphi_h(x)\}\subseteqq(\mathfrak{D}_{R^n})$ が $\varphi_h\Longrightarrow 0\ ((\mathfrak{S}_{R^n}))$ ならば，任意の $q\geqq 0$ に対して

$$R^n \text{ において一様に } \lim_{h\to\infty}(1+|x|^q)D^{(p)}\varphi_h(x)=0$$

よって $f(x)$ が有界なことを用い，q を十分大きくとって

$$|T(\varphi_h)|\leqq\int_{R^n}\frac{1+|x|^k}{1+|x|^q}|f(x)|\cdot(1+|x|^q)|D^{(p)}\varphi_h(x)|dx\to 0\quad(h\to\infty)$$

となる．$x=0$ を中心とする極座標で $dx=|x|^{n-1}d|x|\cdot d\Omega_{n-1}$ となるからであ

る. 故に前定理によって T は $(\mathfrak{S}_{R^n})'$ に属する.

必要なこと：第一段；T が $(\mathfrak{S}_{R^n})'$ に属するとせよ. T の $(\mathfrak{S}_{R^n})$ の上における連続性から, 適当に正整数 s と m および正数 ε をとって

$$\varphi(x)\epsilon(\mathfrak{S}_{R^n}) \text{ かつ } \sup_{x \epsilon R^n, |p|\leqq m}(1+|x|^s)|D^{(p)}\varphi(x)|\leqq \varepsilon \text{ ならば } |T(\varphi)|\leqq 1 \tag{11·5}$$

が成り立つようにできる. ところが $\varphi_1(x)\epsilon(\mathfrak{S}_{R^n})$ であるならば $|x|\to\infty$ なるとき $\varphi_1(x)\to 0$, したがって

$$\varphi_1(x)=\int_{-\infty}^{x_i}\frac{\partial\varphi_1}{\partial t}(x_1,\cdots,x_{i-1},t,x_{i+1},\cdots,x_n)dt \tag{11·6}$$

が成り立ち, これから定理 2·4 の証明第二段におけると同じく, (11·5) の仮定は, 適当に $\eta>0$ と $N>0$ とをとって

$$\varphi(x)\epsilon(\mathfrak{S}_{R^n}) \text{ かつ } \left|\frac{\partial^{mn}\varphi(x)}{\partial x_1{}^m\partial x_2{}^m\cdots\partial x_n{}^m}\right|\leqq\frac{\eta}{(1+|x|^N)}$$

なるとき満足される. だから

$$D=\frac{\partial^m}{\partial x^m}=\frac{\partial^{mn}}{\partial x_1{}^m\partial x_2{}^m\cdots\partial x_n{}^m},$$

$$\nu_{N,D}(\varphi)=\sup_{x\epsilon R}(1+|x|^N)|D\varphi(x)|,$$

として, T の加法性を用い

$$\varphi(x)\epsilon(\mathfrak{S}_{R^n}) \text{ ならば } |T(\varphi)|\leqq\frac{1}{\eta}\nu_{N,D}(\varphi) \tag{11·6}$$

が成り立つ. ところが $\tau_{-y}\varphi(x)=\varphi(x-y)$ として

$$\nu_{N,D}(\tau_{-y}\varphi)=\sup_x(1+|x|^N)|D\tau_{-y}\varphi(x)|=\sup_x(1+|x|^N)|D\varphi(x-y)|$$
$$=\sup_x(1+|x+y|^N)|D\varphi(x)|$$

および

$$(1+|x+y|^N)/(1+|x|^N)(1+|y|^N)\leqq(1+(|x|+|y|)^N)/(1+|x|^N)(1+|y|^N)$$
$$\leqq(2^N+2^N|x|^N+2^N|y|^N)/(1+|x|^N+|y|^N)\leqq 2^N$$

によって

$$\nu_{N,D}(\tau_{-y}\varphi) \leqq 2^N(1+|y|^N)\nu_{N,D}(\varphi).$$

したがって (11·6) から

$$\varphi(x)\epsilon(\mathfrak{S}_{R^n}) \text{ ならば } |T_{(y)}\cdot\varphi(x-y)| \leqq \frac{1}{\eta}2^N(1+|x|^N)\nu_{N,D}(\varphi) \quad (11\cdot6)'$$

第二段；$x=0$ を含む有界開集合 G をとる．D の微分の階数を $p=mn$ とし，G にその台が含まれかつ C^p であるような $u(x)$ と正整数 q とを適当にとると

$$\Delta^q T_u = T_\delta + T_\xi, \quad \xi(x) \text{ は } \epsilon(\mathfrak{D}_{R^n}) \text{ で } \mathrm{car.}(\xi) \subseteqq G \quad (11\cdot7)$$

とできることは § 7·1 に示した．G の閉苞であるコンパクト集合を内部に含むような有界開集合 G_1 をとる．(5·12) を満足するような $\beta_h(x)\epsilon(\mathfrak{S}_{R^n})$ に対し

$$u_h(x) = u * \beta_h(x)\epsilon(\mathfrak{D}_{R^n})$$

をつくると h が十分大きいとき $\mathrm{car}(u_h) \subseteqq G_1$ かつ

$$\lim_{h\to\infty} \nu_{0,D}(u-u_h)=0 \text{ したがって}^{1)} \lim_{h\to\infty} \nu_{N,D}(u-u_h)=0 \quad (11\cdot8)$$

なることが，定理 5·4 の証明中におけると同じようにしてわかる．故に (11·7) から，任意のコンパクト集合 $\subseteqq R^n$ の上で

$$|T_{(y)}\cdot(u_h(x-y)-u_k(x-y))| \leqq \frac{1}{\eta}2^N(1+|x|^N)\nu_{N,D}(u_h-u_k)$$
$$\leqq \frac{1}{\eta}2^N(1+|x|^N)\{\nu_{N,D}(u_h-u)+\nu_{N,D}(u-u_k)\}$$

の右辺は $h, k \to \infty$ とともに一様に 0 に収束する．よって R^n で連続な函数 $v(x)$ が存在して

$$\text{任意のコンパクト集合の上で一様に } \lim_{h\to\infty} T_{(y)}\cdot u_h(x-y) = v(x) \quad (11\cdot9)$$

また (11·8) から容易にわかるように

$$T_uh \Longrightarrow T_u((\mathcal{E}_{R^n})')$$

同じく (11·9) によって

$$T_{T_{(y)}\cdot u_h(x-y)} \Longrightarrow T_{v(x)} \quad ((\mathfrak{D}_{R^n})')$$

であるから，(5·11) によって

$$T * T_u = T_v \quad (11\cdot10)$$

1) u も u_h も台が G_1 に含まれていると考えてよいから

である．故に (5·7),(5·9) と (11·7) を用い

$$\Delta^q T_v = T * \Delta^q T_u = T * (T_\delta + T_\xi) = T * T_\delta + T * T_\xi = T + T * T_\xi.$$

したがって (5·11) による

$$T * T_\xi = T_{\tilde{\xi}}, \quad \tilde{\xi}(x) = T_{(y)} \cdot \xi(x-y) \in (\mathfrak{E}_{R^n})$$

によって

$$T = \Delta^q T_v + T_{\tilde{\xi}}, \ v(x) \in C^0, \ \tilde{\xi}(x) \in C^\infty \tag{11·11}$$

が得られた．

第三段；(11·6)′ から

$$|T_{(y)} \cdot u_h(x-y)| \leqq \frac{1}{\eta} 2^N (1+|x|^N) \nu_{N,D}(u_h)$$

であり，(11·8) によって $\nu_{N,D}(u_h)$ は h が動くとき有界であるから，(11·9) によって

$$|v(x)| \leqq M_0(1+|x|^N)$$

なる定数 M_0 が存在する．同じく $\xi(x) \in (\mathfrak{D}_{R^n})$ であるから (11·6)′ により

$$|\tilde{\xi}(x)| \leqq M_1(1+|x|^N)$$

なる定数 M_1 がある．結局定数 M に対して

$$\left. \begin{array}{l} T = \Delta^q T_v + T_{\tilde{\xi}}; \ v(x), \tilde{\xi}(x) \text{ は } C^0 \text{ でかつ} \\ |v(x)| \leqq M(1+|x|^N), \ |\tilde{\xi}(x)| \leqq M(1+|x|^N) \end{array} \right\} \tag{11·12}$$

がいえた．ところで

$$\zeta(x) = \int_0^{x_1} \tilde{\xi}(t, x_2, \cdots, x_n) dt$$

とおくと

$$\partial\zeta/\partial x_1 = \tilde{\xi}(x), \qquad |\zeta(x)| \leqq M \cdot |x| (1+|x|^N)$$

である．この操作用を繰返して $w(x)$ と定数 M' を適当にとると

$$w(x) \text{ は } C^0 \text{ で } \Delta^q w(x) = \tilde{\xi}(x) \text{ かつ } |w(x)| \leqq M'(1+|x|^{N+2q})$$

とできる．

かくして (11·12) から

$$T = \Delta^q T_{f(x)(1+|x|^{N+2q})}, \ f(x) \text{ は } R^n \text{ で有界連続函数} \tag{11·13}$$

なる $f(x)$ の存在することがわかる．

$$f(x)(1+|x|^{N+2q})=v(x)+w(x)$$

ととればよいのである.

かくして標語的に

緩増加な超函数＝緩増加連続函数に Δ^q をほどこしたもの

ということができる.

系 $(\mathfrak{S}_{R^n})' \neq (\mathfrak{D}_{R^n})'$

(上の定理から緩い超函数は R^n において階数が有限であるからである.)

注意 $n=1$ なるとき $T_{\exp(x)}$ は $(\mathfrak{S}_{R_1})'$ に属さない. $\exp(x)$ を何回不定積分しても緩増加な函数にならないからである.

11・2 緩増加な測度

緩増加な超函数について他の例を与えるために標記について考える. まず定義を与えよう.

緩増加な測度の定義 R^n のすべての Borel 集合 E に対して定義せられた $\mu(E)$ が

$$\left.\begin{array}{l}\mu(E)\geqq 0,\ E \text{ がコンパクトならば } \infty>\mu(E), \text{ かつ互に共通}\\ \text{点のない } E_i\ (i=1,2,\cdots) \text{ に対して } \mu\left(\sum_{i=1}^{\infty}E_i\right)=\sum_{i=1}^{\infty}\mu(E_i)\end{array}\right\} \quad (11\cdot 14)$$

を満足するとする. このような**正測度** (positive measure) が**緩増加** (slowly increasing) であるというのは, 適当に正整数 k をとると

$$\int_{R^n}(1+|x|^2)^{-k}\mu(dx)<\infty \qquad (11\cdot 15)$$

が成り立つことと定義する. 例えば普通の Lebesgue 測度 $\mu(dx)=dx$ はその例である.

定理 11・4 R^n の正測度 $\mu(E)$ からつくられた超函数 T_μ :

$$T_\mu(\varphi)=\int_{R^n}\varphi(x)\mu(dx),$$

が緩増加であるための必要かつ十分な条件は $\mu(E)$ が緩増加なことである.

(証明) 十分なこと : 任意の $\varphi(x)\in(\mathfrak{S}_{R^n})$ に対して

$$T_\mu(\varphi)=\int_{R^n}(1+|x|^2)^k\varphi(x)\frac{\mu(dx)}{(1+|x|^2)^k}$$

もしも $\{\varphi_h(x)\}\subseteqq(\mathfrak{D}_{R^n})$ が $\varphi_h\Longrightarrow 0$ $((\mathfrak{S}_{R^n}))$ ならば，R^n において一様に

$$(1+|x|^2)^k\varphi_h(x)\to 0 \ (h\to\infty)$$

であるから，(11·15) から $T_\mu(\varphi_h)\to 0$. 故に定理 11·2 によって T_μ は緩増加である．

必要であること： $T_\mu\epsilon(\mathfrak{S}_{R^n})'$ であるから，

$\varphi(x)\epsilon(\mathfrak{D}_{R^n})$ かつ $\sup\limits_{x\varepsilon R,\,|p|\leqq m}(1+|x|^2)^k|D^{(p)}\varphi(x)|\leqq\varepsilon$ ならば

$$|T_\mu(\varphi)|\leqq 1 \tag{11·16}$$

となるような m と k と $\varepsilon>0$ とが存在する．この k は m より大きくとってもよい． $\alpha(x)\epsilon(\mathfrak{D}_{R^n})$ を $|x|\leqq 1$ において 1 となる函数とすると $\alpha_h(x)=\alpha\left(\dfrac{x}{h}\right)$ は

$\alpha_h(x)\Longrightarrow 1$ $((\mathfrak{E}_{R^n}))$ かつすべての m に対して $\sup\limits_{x\varepsilon R^n,\,|p|\leqq m,\,h\geqq 1}|D^{(p)}\alpha_h(x)|$

は有限である，

を満足する．よって十分小さい $\eta>0$ と十分大きい l に対して

$$\varphi_h(x)=\eta\alpha_h(x)/(1+|x|^2)^l \quad (h=1,2,\cdots)$$

が (11·16) の仮定を満足することがわかる．したがって

$$T_\mu(\varphi_h)=\int_{R^n}[\eta\alpha_h(x)/(1+|x|^2)^l]\mu(dx)=\eta\int_{R^n}\frac{\alpha_h(x)\mu(dx)}{(1+|x|^2)^l}\leqq 1$$

ここにおいて $h\to\infty$ ならしめると $\alpha_h(x)\Longrightarrow 1$ $((\mathfrak{E}_{R^n}))$ によって

$$\int_{R^n}\frac{\mu(dx)}{(1+|x|^2)^l}\leqq\frac{1}{\eta}$$

が導かれる．(終)

注意 一般に複素数値をとる測度 $\mu(E)$ に対して，その緩増加性を μ の E における全変分 $|\mu|(E)$ が正測度として緩増加なことによって定義するのは自然であろう．ところがこう定義すると，つねに $\mu(E)\geqq 0$ でない測度 μ に対しては定理の必要条件は一般には成り立たない．例えば R^1 において ε_i すべて >0 かつ $\sum_{i=1}^{\infty}|a_i|\varepsilon_i<\infty$ なるとき，測度

$$\mu(E)=\sum_{i=1}^{\infty}a_i(\delta_{(i+\varepsilon_i)}(E)-\delta_{(i)}(E))$$

を考えると[1),]

$$T_\mu(\varphi)=\sum_{i=1}^{\infty}a_i\{\varphi(i+\varepsilon_i)-\varphi(i)\},\qquad \varphi\epsilon(\mathfrak{D}_{R^n})$$

であるから $|T_\mu(\varphi)|\leqq\sum_{i=1}^{\infty}|a_i|\cdot\varepsilon_i\sup_{x\in R^1}\left|\frac{d\varphi}{dx}(x)\right|$ となり T_μ は緩増加な超函数である．しかし，$\sum_{i=1}^{\infty}|a_i|\varepsilon_i\leqq 1$ なる条件のもとに，ε_i が十分すみやかに 0 に収束すればそれに応じて $|a_i|$ をいくらでもすみやかに増加するようにできて，与えられた $k>0$ に対して

$$|\mu|(E)=\sum_{i=1}^{\infty}|a_i|(\delta_{(i+\varepsilon_i)}(E)+\delta_{(i)}(E))$$

が

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{(1+x^2)^k}|\mu|(dx)=\sum_{i=1}^{\infty}|a_i|\left\{\frac{1}{(1+(i+\varepsilon_i)^2))^k}+\frac{1}{(1+i^2)^k}\right\}=\infty$$

を満足するようにできる．

11・3　緩増加な超函数の Fourier 変換

緩増加な超函数の Fourier 変換の定義　$\varphi(x)\epsilon(\mathfrak{S}_x)=(\mathfrak{S}_{R^n})$ の Fourier 変換

$$\psi(y)=(\mathfrak{F}\varphi)(y)=\int_{R^n}\varphi(x)\exp(-2\pi\sqrt{-1}x\cdot y)dx$$

に対して (10・6)′ が成り立つから，

$$\varphi_h(x)\Longrightarrow 0\ ((\mathfrak{S}_x))\ \text{ならば}\ \psi_h(y)=(\mathfrak{F}\varphi_h)(y)\Longrightarrow 0\ ((\mathfrak{S}_y))\qquad(11\cdot 17)$$

またこの逆も成り立つ．故に任意の $T\epsilon(\mathfrak{S}_y)'$ に対して $T(\mathfrak{F}\varphi)$ を φ の汎函数と考えると $\varphi_h(x)\Longrightarrow 0\ ((\mathfrak{S}_x))$ なるとき $T(\mathfrak{F}\varphi_h)\to 0$．よって $T(\mathfrak{F}\varphi)$ によって $(\mathfrak{S}_x)$ の上の超函数が定義されるわけである．これを T の Fourier 変換とよび $\mathfrak{F}T$ で表わす．すなわち

$$(\mathfrak{F}T)(\varphi)=T(\mathfrak{F}\varphi)=T_{(y)}\left(\int_{R^n}\varphi(x)\exp(-2\pi\sqrt{-1}\,x\cdot y)dx\right)$$

同様にし $T\epsilon(\mathfrak{S}_x)'$ の共役 Fourier 変換 $\mathfrak{F}^*T$ を

---

1)　$\delta_{(j)}(E)=\begin{cases}1, & E\ni j\ \text{のとき}\\ 0, & E\not\ni j\ \text{のとき}\end{cases}$

$$(\mathfrak{F}^*T)(\psi)=T(\mathfrak{F}^*\psi)=T_{(x)}\left(\int_{R^n}\psi(y)\exp(2\pi\sqrt{-1}\,y\cdot x)dy\right)$$

によって定義する．$(\mathfrak{S}_x)$, $(\mathfrak{S}_y)$ あるいは $T_{(x)}$, $T_{(y)}$ などと書いたのは独立変数が紛れないための便宜であったわけで，たいせつなのは緩増加な超函数の Fourier 変換および共役 Fourier 変換が

$$(\mathfrak{F}T)(\varphi)=T(\mathfrak{F}\varphi),\quad (\mathfrak{F}^*T)(\varphi)=T(\mathfrak{F}^*\varphi),\quad \varphi\in(\mathfrak{S}_{R^n}) \tag{11・18}$$

によって定義されるところにあるのである．

諸公式

(i)　$\mathfrak{F}^*\mathfrak{F}T=T,\qquad \mathfrak{F}\mathfrak{F}^*T=T$

(ii)
$$\begin{cases}\mathfrak{F}T_\delta=T_1, & \mathfrak{F}T_1=T_\delta\\ \mathfrak{F}T_{\delta_h}=T_{\exp(-2\pi\sqrt{-1}h\cdot y)}, & \mathfrak{F}T_{\exp(2\pi\sqrt{-1}h\cdot x)}=T_{\delta_h}\\ \mathfrak{F}\dfrac{\partial}{\partial x_k}T_\delta=T_{2\pi\sqrt{-1}y_k}, & \mathfrak{F}T_{2\pi\sqrt{-1}x_k}=-\dfrac{\partial}{\partial y_k}T_\delta\end{cases}$$

(iii)
$$\begin{cases}\mathfrak{F}(\tau_hT)=\exp(-2\pi h\cdot y)\cdot(\mathfrak{F}T)\\ \mathfrak{F}\left(\dfrac{\partial T}{\partial x_k}\right)=2\pi\sqrt{-1}\,y_k\cdot(\mathfrak{F}T)\\ \mathfrak{F}(2\pi\sqrt{-1}\,x_k\cdot T)=-\dfrac{\partial}{\partial y_k}(\mathfrak{F}T)\end{cases}$$

(iv)
$$\begin{cases}(\mathfrak{F}T)^\vee=\mathfrak{F}T^\vee=\mathfrak{F}^*T, & \text{ただし } \check{T}_{(x)}(\varphi(x))=T_{(x)}(\varphi(-x))\\ (\mathfrak{F}T)^-=\mathfrak{F}T^*=\mathfrak{F}^*T^-, & \text{ただし } \bar{T}_{(x)}(\varphi(x))=T_{(x)}(\overline{\varphi(x)})\\ (\mathfrak{F}T)^*=\mathfrak{F}T^-=\mathfrak{F}^*T^*, & \text{ただし } T^*_{(x)}(\varphi(x))=T_{(x)}(\overline{\varphi(-x)})\end{cases}$$

（証明）(i) (10・10) によって

$$(\mathfrak{F}^*\mathfrak{F}T)(\varphi)=(\mathfrak{F}T)(\mathfrak{F}^*\varphi)=T(\mathfrak{F}\mathfrak{F}^*\varphi)=T(\varphi)$$

(ii)
$$(\mathfrak{F}T_\delta)(\varphi)=T_\delta\left(\int_{R^n}\varphi(y)\exp(-2\pi\sqrt{-1}\,y\cdot x)dy\right)$$
$$=\int_{R^n}\varphi(y)dy=T_1(\varphi)$$
$$(\mathfrak{F}T_{\delta_h})(\varphi)=T_{\delta_h}\left(\int_{R^n}\varphi(y)\exp(-2\pi\sqrt{-1}\,y\cdot x)dy\right)$$

$$=\int_{R^n}\varphi(y)\exp(-2\pi\sqrt{-1}\,y\cdot h)dy=T_{\exp(-2\pi\sqrt{-1}y\cdot h)}(\varphi(y))$$

$$\left(\mathfrak{F}\frac{\partial}{\partial x_k}T_\delta\right)(\varphi)=\left(\frac{\partial}{\partial x_k}T_\delta\right)\left(\int_{R^n}\varphi(y)\exp(-2\pi\sqrt{-1}\,y\cdot x)dy\right)$$

$$=-\int_{R^n}\varphi(y)\left(\frac{\partial\exp(-2\pi\sqrt{-1}\,y\cdot x)}{\partial x_k}\right)_{x=0}dy$$

$$=T_{2\pi\sqrt{-1}y_k}(\varphi(y))$$

残りの三つも同様にして証明される.

(iii)　$$(\mathfrak{F}\tau_hT)(\varphi)=(\tau_hT)\left(\int_{R^n}\varphi(y)\exp(-2\pi\sqrt{-1}\,y\cdot x)dy\right)$$

$$=T_{(x)}\left(\int_{R^n}\varphi(y)\exp(-2\pi\sqrt{-1}\,y\cdot(x+h)\right)dy$$

$$=\{\exp(-2\pi\sqrt{-1}\,y\cdot h)\cdot(\mathfrak{F}T)\}(\varphi)$$

(10·4) によって

$$\left(\mathfrak{F}\frac{\partial T}{\partial x_k}\right)(\varphi)=-T_{(x)}\left\{\frac{\partial}{\partial x_k}\left(\int_{R^n}\varphi(y)\exp(-2\pi\sqrt{-1}\,y\cdot x)dy\right)\right\}$$

$$=-T_{(x)}\left(\int_{R^n}(-2\pi\sqrt{-1}\,y_k)\cdot\varphi(y)\exp(-2\pi\sqrt{-1}\,y\cdot x)dy\right)$$

$$=(2\pi\sqrt{-1}\,y_k\cdot\mathfrak{F}T)(\varphi).$$

(10·5) によって

$$(\mathfrak{F}(2\pi\sqrt{-1}\,x_k\cdot T))(\varphi)$$

$$=T_{(x)}\left\{2\pi\sqrt{-1}\,x_k\int_{R^n}\varphi(y)\exp(-2\pi\sqrt{-1}\,y\cdot x)dy\right\}$$

$$=T_{(x)}\left(\int_{R^n}\frac{\partial\varphi(y)}{\partial y_k}\exp(-2\pi\sqrt{-1}\,y\cdot x)dy\right)$$

$$=(\mathfrak{F}T)\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y_k}\right)=-\left(\frac{\partial}{\partial y_k}(\mathfrak{F}T)\right)(\varphi).$$

(iv)　$$(\mathfrak{F}T)^\vee(\varphi)=T_{(x)}\left(\int_{R^n}\varphi(y)\exp(+2\pi\sqrt{-1}\,y\cdot x)dy\right)=(\mathfrak{F}^*T)(\varphi)$$

$$=\check{T}_{(x)}\left(\int_{R^n}\varphi(y)\exp(-2\pi\sqrt{-1}\,y\cdot x)dy\right)=(\mathfrak{F}T^\vee)(\varphi).$$

次に (10・15) で

$$\mathfrak{F}\varphi^*=\overline{\mathfrak{F}\varphi},\quad \text{ただし}\ \varphi^*(x)=\overline{\varphi(-x)}$$

であり，同様にして

$$\mathfrak{F}\bar{\varphi}=\overline{\mathfrak{F}^*\varphi},\quad (\mathfrak{F}\varphi)^*=\mathfrak{F}\bar{\varphi},\quad (\mathfrak{F}^*\varphi)^{\vee}=\mathfrak{F}\varphi\ \ (\varphi^{\vee}(x)=\varphi(-x))$$

も得られることから残りの公式も証明される．すなわち

$$\begin{aligned}(\mathfrak{F}T)^-(\varphi)&=(\mathfrak{F}T)(\bar{\varphi})=T(\mathfrak{F}\bar{\varphi})=T(\overline{\mathfrak{F}^*\varphi})\\&=T^-(\mathfrak{F}^*\varphi)=(\mathfrak{F}^*T^-)(\varphi),\\(\mathfrak{F}T^*)(\varphi)&=T^*(\mathfrak{F}\varphi)=T((\mathfrak{F}\varphi)^*)=T(\mathfrak{F}\bar{\varphi})=(\mathfrak{F}T)^-(\varphi)\\(\mathfrak{F}T)^*(\varphi)&=(\mathfrak{F}T)(\varphi^*)=T(\mathfrak{F}\varphi^*)=T(\overline{\mathfrak{F}\varphi})\\&=T^-(\mathfrak{F}\varphi)=\mathfrak{F}T^-(\varphi)\\(\mathfrak{F}^*T^*)(\varphi)&=T^*(\mathfrak{F}^*\varphi)=T^-((\mathfrak{F}^*\varphi)^{\vee})=T^-(\mathfrak{F}\varphi)=(\mathfrak{F}T^-)(\varphi).\end{aligned}$$

(終)

注 1 公式 (i), (iii), (iv) は函数について古典的によく知られた公式を緩増加な超函数の場合に拡張したものである．しかし古典的な場合には函数は十分に滑らかでかつ $|x|\to\infty$ なると十分すみやかに 0 に近づくことが要求される．したがって例えば多項式の Fourier 変換というようなことは意味がない．ところが多項式 $P(x)$ は緩増加な函数であるから $T_{P(x)}$ は緩増加な超函数であるからその Fourier 変換は定義されるのである．しかして，また古典論では解釈がつけがたかったが，しかし物理学者や電気学者が**記号解析** (operational calculus) としてその便利なことを強調していた公式 ($n=1$ とする)

$$\delta_y=\mathfrak{F}((1)_x)=\int_{-\infty}^{\infty}\exp(-2\pi\sqrt{-1}\,xy)\,dx=2\int_0^{\infty}\cos 2\pi xy\,dx$$

$$\frac{\partial\delta}{\partial y}=\mathfrak{F}(-2\pi\sqrt{-1}\,x)=\int_{-\infty}^{\infty}(-2\pi\sqrt{-1}\,x)\exp(-2\pi\sqrt{-1}\,xy)\,dx$$

$$=-2\int_0^{\infty}2\pi x\sin 2\pi xy\,dx$$

などは公式 (ii) によって鮮かに解釈されるのである．

注 2 超函数 T の試料函数 φ における値 $T(\varphi)$ を $T_{(x)}(\varphi(x))$ と書いても $T_{(y)}(\varphi(y))$ と書いてもよい．これは核超函数のところで述べたように $T(\varphi)$ は“一般化された積分” $\int_{R^n}T_{(x)}\varphi(x)dx$ であり，積分変数を x としても y としても差支えないことに対応する．こう考えると公式 (ii), (iii) の一部は

$$\mathfrak{F}\frac{\partial}{\partial x_k}T_\delta=T_{2\pi\sqrt{-1}x_k},\qquad \mathfrak{F}T_{2\pi\sqrt{-1}x_k}=-\frac{\partial}{\partial x_k}T_\delta$$

$$\mathfrak{F}\frac{\partial T}{\partial x_k}=2\pi\sqrt{-1}\,x_k\cdot\mathfrak{F}T,\qquad \mathfrak{F}(2\pi\sqrt{-1}\,x_k\cdot T)=-\frac{\partial}{\partial x_k}(\mathfrak{F}T)$$

等と書けば，Fourier 変換では

$$\begin{cases}\text{微分 } \dfrac{\partial}{\partial x_k} \text{ が } 2\pi\sqrt{-1}\,x_k \text{ を乗ずることに，また}\\ 2\pi\sqrt{-1}\,x_k \text{ を乗ずることは微分 } -\dfrac{\partial}{\partial x_k} \text{ になる}\end{cases}$$

と標語的に覚え易くなるのである.

11.4 Fourier 変換の例

緩増加な測度 $\mu(E)$ を R^n の上の緩増加な正測度とすると，正整数 k に対して正測度 $\nu(E)$ で

$$\mu(dx)=(1+|x|^2)^k\nu(dx),\qquad \int_{R^n}\nu(dx)<\infty \tag{11·19}$$

を満足するものが存在する．ところで公式 (iii) によって

$$\mathfrak{F}\left(\left(1-\frac{1}{4\pi^2}\varDelta_{(x)}\right)\cdot T_{(x)}\right)=(1+|y|^2)\cdot(\mathfrak{F}T_{(x)})$$

を得るから

$$\mathfrak{F}\left(\left(1-\frac{1}{4\pi^2}\varDelta_{(x)}\right)^k T_{(x)}\right)=(1+|y|^2)^k\cdot(\mathfrak{F}T_{(x)}) \tag{11·20}$$

が成り立つ．同様にして

$$\mathfrak{F}^*\left(\left(1-\frac{1}{4\pi^2}\varDelta_{(x)}\right)^k T_{(x)}\right)=(1+|y|^2)^k\cdot(\mathfrak{F}^*T_{(x)}) \tag{11·20'}$$

も成り立つ．だから $T_{(x)}=\mathfrak{F}T_\nu$ として公式 (i) を用い

$$\mathfrak{F}^*\left(\left(1-\frac{1}{4\pi^2}\varDelta_{(x)}\right)^k\cdot(\mathfrak{F}T_\nu)\right)=(1+|y|^2)^k(\mathfrak{F}^*\mathfrak{F}T_\nu)=(1+|y|^2)^kT_\nu=T_\mu$$

両辺に $\mathfrak{F}$ をほどこして公式 (i) を用い

$$(\mathfrak{F}T_\mu)=\left(1-\frac{1}{4\pi^2}\varDelta\right)^k(\mathfrak{F}T_\nu)$$

が得られた． $\int_{R^n} \nu(dy) < \infty$ であるから積分順序を交換し

$$(\mathfrak{F}T_\nu)(\varphi) = \int_{R^n} \nu(dy)\left[\int_{R^n} \varphi(x)\exp(-2\pi\sqrt{-1}\,x\cdot y)dx\right]$$
$$= \int_{R^n} \varphi(x)dx\left[\int_{R^n} \exp(-2\pi\sqrt{-1}\,x\cdot y)\,\nu(dy)\right]$$
$$= T_{(\mathfrak{F}\nu)(x)}(\varphi(x))$$

Fourier-Stieltjes 積分 $(\mathfrak{F}\nu)(x)$ は有界かつ一様連続函数である．有界なことは $|\exp(-2\pi\sqrt{-1}\,x\cdot y)| = 1$ なることからわかるし，また連続なことは不等式

$$|(\mathfrak{F}\nu)(x+h) - (\mathfrak{F}\nu)(x)| \leqq \int_{|y|\leqq N} |\exp(-2\pi\sqrt{-1}\,(x+h)\cdot y)$$
$$-\exp(-2\pi\sqrt{-1}\,x\cdot y)|\nu(dy) + \int_{|y|>N} 2\nu(dy)$$

からわかる．右辺第二項は N を大きくすると 0 に収束し，また右辺第一項は N を固定して $h\to 0$ ならしめると x に関して一様に 0 に収束するからである．かくして

$$\mathfrak{F}T_\mu = \left(1 - \frac{\Delta}{4\pi^2}\right)^k T_{\mathfrak{F}\nu} \tag{11·21}$$

$(\mathfrak{F}\nu)(x)$ が有界連続函数であるから，この結果は (11·4) に符合する．

距離の函数　R^n において $|x| = r$ として $\mathfrak{F}r^\alpha$ を計算してみたい．ここに α は複素数とする．$\Re(\alpha) > 0$ ならば

$$r^\alpha = (1+r^2)^k \cdot \frac{r^\alpha}{(1+r^2)^k} = (1+r^2)^k f_k(r) \tag{11·22}$$

において正整数 k を $\Re(\alpha) - 2k + n - 1 < -1$ なるようにとると $dx = r^{n-1}drd\Omega_{n-1}$ によって $\int_{R^n} |f_k(r)|dx < \infty$，故に緩測度の場合と同様にして

$$(\mathfrak{F}f_k)(y) = \int_{R^n} f_k(r)\exp(-2\pi\sqrt{-1}\,x\cdot y)dx \tag{11·23}$$

は R^n で有界一様連続になる．また (11·22) から，(11·21) を得たと同様にして，

$$\mathfrak{F}T_{r^\alpha}=\left(1-\frac{\Delta}{4\pi^2}\right)^k T_{\mathfrak{F}f_k}$$

ところが (11・23) の右辺は $|y|$ の函数になることがわかる．原点のまわりの回転 $y\to y'$ をほどこすと

$$(\mathfrak{F}f_k)(y')=\int_{R^n} f_k(|x|)\exp(-2\pi\sqrt{-1}\,x\cdot y')dx$$

となるが，これは内積や体積および距離が回転に対して変わらないことから

$$=\int_{R^n} f_k(|x'|)\exp(-2\pi\sqrt{-1}\,x'\cdot y')dx'$$

$$=\int_{R^n} f_k(|x|)\exp(-2\pi\sqrt{-1}\,x\cdot y)dx=(\mathfrak{F}f_k)(y)$$

となるからである．よって

$$(\mathfrak{F}T_{r^\alpha})(\varphi)=\int_{R^n}(\mathfrak{F}f_k)(|y|)\left(1-\frac{1}{4\pi^2}\Delta_y\right)^k\varphi(y)dy$$

すなわち

$$\mathfrak{F}T_{r^\alpha}=\left(1-\frac{1}{4\pi^2}\Delta\right)^k T_{(\mathfrak{F}f_k)(r)} \tag{11・24}$$

$(\mathfrak{F}f_k)(r)=(\mathfrak{F}f_k)(|x|)$ が R^n で有界連続函数であるから，この結果は (11・4) に符合する

もしも $\Re\alpha>0$ または $\Re\alpha<-n$ であれば

$$\mathfrak{F}T_{r^\alpha}=\pi^{-n/2-\alpha}\Gamma\left(\frac{\alpha+n}{2}\right)\Gamma\left(-\frac{\alpha}{2}\right)^{-1}T_{r^{-(\alpha+n)}} \tag{11・25}$$

の成り立つことがわかっている．ただし α は $(\alpha+n)/2$ や $-\alpha/2$ を負の整数にしないものとする．ここには証明は略す．興味をもたれる読者は Schwartz の原著[1] をみられたい．

なお

$$\mathfrak{F}T_{r^{2h}}=\left(-\frac{\Delta}{4\pi^2}\right)^h T_\delta,\qquad h \text{ は正整数} \tag{11・26}$$

$$\mathfrak{F}[\Delta T_{r^{2-n}}]=(2-n)2\pi^{n/2}\Gamma(n/2)^{-1}T_1,\ (n\geqq 3 \text{ のとき}) \tag{11・27}$$

1) Théorie des distributions, II (1951), 113.

$$\mathfrak{F}[\Delta T_{\log(1/r)}] = -2\pi T_1 \qquad (n=2 \text{ のとき}) \tag{11·28}$$

（証明）（11·26）は諸公式の（ii）における $\mathfrak{F}T_{2\pi\sqrt{-1}x_k} = -\dfrac{\partial}{\partial y_k}T_\delta$ から得られる．次に

$$(\mathfrak{F}(\Delta T_{r^{2-n}}))(\varphi) = T_{r^{2-n}}\left(\Delta_{(x)}\int_{R^n}\varphi(y)\exp(-2\pi\sqrt{-1}\,y\cdot x)dy\right)$$

これは（6·3）によって

$$= (2-n)\,\Omega_{-n}T_\delta\left(\int_{R^n}\varphi(y)\exp(-2\pi\sqrt{-1}\,y\cdot x)dy\right) = T_{(2-n)\Omega_{n-1}}(\varphi)$$

に等しいから（11·27）が証明された．(11·28) も同様にして証明される．（終）

11·5　正 型 超 函 数

正型の超函数の定義　緩増加な超函数 T は,

$$\text{すべての } \varphi\epsilon(\mathfrak{S}_{R^n}) \text{ に対して } T(\varphi*\varphi^*)\geqq 0^{1)} \tag{11·20}$$

なるとき**正型** (positive definite) であるといわれる.

定理 11·5　緩増加超函数 T が正型であるための必要かつ十分な条件は，T が緩増加な正測度の Fourier 変換であることである.

[S. Bochner の定理の拡張]

（証明）十分なこと：$T=\mathfrak{F}T_\mu$ とすると（10·11）と（10·15）によって

$$T(\varphi*\varphi^*) = T_\mu(\mathfrak{F}(\varphi*\varphi^*)) = \int_{R^n}(\mathfrak{F}\varphi)(x)\cdot\overline{(\mathfrak{F}\varphi)}(x)\mu(dx)$$

となるから，$\mu(E)\geqq 0$ によって $T(\varphi*\varphi^*)\geqq 0$ となる.

必要なこと：$\mathfrak{F}^*T=S$ とすると，諸公式の（i）により $\mathfrak{F}S=\mathfrak{F}\mathfrak{F}^*T=T$.
故に

$$T(\varphi*\varphi^*) = (\mathfrak{F}S)(\varphi*\varphi^*) = S(\mathfrak{F}(\varphi*\varphi^*))$$
$$= S_{(x)}((\mathfrak{F}\varphi)(x)\cdot\overline{(\mathfrak{F}\varphi)(x)})$$

$\mathfrak{F}$ は $(\mathfrak{S}_y)$ を 1 対 1 に $(\mathfrak{S}_x)$ に写像するから

$$\text{すべての } \psi(x)\epsilon(\mathfrak{S}_x) \text{ に対して } S_{(x)}(|\psi(x)|^2)\geqq 0$$

となったわけである．よって，とくに

1)　$\varphi^*(x) = \overline{\varphi(-x)}$

$$\text{すべての } \varphi(x)\in(\mathfrak{D}_x) \text{ に対して } S_{(x)}(|\varphi(x)|^2)\geqq 0 \tag{11·30}$$

ところが R^n においてつねに $\geqq 0$ なる函数 $\psi(x)\in(\mathfrak{D}_x)$ に対して，

$\alpha(x)\in(\mathfrak{D}_x)$, $\alpha(x)\geqq 0$ かつ $\alpha(x)$ は $\psi(x)$ の台を含むところで 1 なる $\alpha(x)$ をとると，$h\to\infty$ なるとき

$$\alpha^2(x)\left(\psi(x)+\frac{1}{h}\right)\Rightarrow\psi(x)\ ((\mathfrak{D}_x))$$

であるから，(11·30) によって

$$S_{(x)}(\psi(x))=\lim_{h\to\infty}S_{(x)}\left(\alpha(x)^2\left(\psi(x)+\frac{1}{h}\right)\right)$$
$$=\lim_{h\to\infty}S_{(x)}\left(\left(\alpha(x)\left(\psi(x)+\frac{1}{h}\right)^{1/2}\right)^2\right)\geqq 0$$

となる．故に

$$\psi(x)\in(\mathfrak{D}_x) \text{ がつねに } \geqq 0 \text{ ならば } S(\psi)\geqq 0 \tag{11·31}$$

このような $S(\psi)$ は R^n の上の正測度 μ によって

$$S(\varphi)=T_\mu(\varphi)=\int_{R^n}\varphi(x)\mu(dx),\qquad \varphi\in(\mathfrak{D}_{R^n}) \tag{11·32}$$

と表わされることがよく知られている．

故に $\mathfrak{F}^*T=T_\mu$ で $T=\mathfrak{F}T_\mu$, したがって定理 11·4 によって $\mu(E)$ は緩増加でないといけない．

念のために (11·31) から (11·32) を導くことの証明をしておこう．

測度論の基本定理[1] によって，$(\mathfrak{D}_{R^n})$ の実数値函数列 $\{\varphi_h(x)\}$ が

$$\left.\begin{array}{l}\text{あるコンパクト集合 } K \text{ に対して car.}(\varphi_h)\subseteqq K\ (h=1,2,\cdots)\\ \text{かつ } x \text{ に関して一様に } \lim\limits_{h\to\infty}\varphi_h(x)=0\end{array}\right\}$$

を満足するならば $\lim\limits_{h\to\infty}S(\varphi_h)=0$ なることがいえると (11·32) を成り立たせるような正測度 μ が存在する．ところが $\alpha(x)\in(\mathfrak{D}_{R^n})$ をつねに $\alpha(x)\geqq 0$ かつ K では $\alpha(x)=1$ とすれば正数列 $\{\varepsilon_h\}$ を

$$-\varepsilon_h\alpha(x)\leqq\varphi_h(x)\leqq\varepsilon_h\alpha(x),\qquad \lim_{h\to\infty}\varepsilon_h=0$$

1) 例えば P. Halmos: Measure Theory, New York (1950), p. 216–

なるようにとることができるわけである．(11·31) によって

$$-\varepsilon_h S(\alpha) \leqq S(\varphi_h) \leqq \varepsilon_h S(\alpha), \text{ したがって } \lim_{h\to\infty} S(\varphi_h)=0.$$

注 (11·21) によって，正型な緩増加超函数 T は正整数 k と有界連続函数 f とで

$$T=\left(1-\frac{\Delta}{4\pi^2}\right)^k T_f \tag{11·33}$$

と表わされる．しかも上から $\mu(dx)=(1+|x|^2)^k\nu(dx), \int_{R^n}\nu(dx)<\infty$ なる正測度で μ で

$$T=\mathfrak{F}T_\mu=\left(1-\frac{\Delta}{4\pi^2}\right)^k T_{\mathfrak{F}\nu}, \quad f(x)=(\mathfrak{F}\nu)(x)$$

古典的な Bochner の定理は $k=0$ ととれる場合に相当する．

$\nu(E)\geqq 0, \int_{R^n}\nu(dx)<\infty$ から超函数 $T_f=T_{\mathfrak{F}\nu}$ は正型であることは容易にわかる．このような有界連続函数 $f(x)$ を**正型函数**とよぶことにすると次の定理を得る．

定理 11·6 緩増加な超函数 T が正型であるための必要かつ十分な条件は正型な函数 $f(x)=(\mathfrak{F}\nu)(x)$ と正整数 k を適当にとると (11·33) の形に表現されることである．

（証明） 必要なこと ：上に示した．

十分なこと ：

$$T=\left(1-\frac{1}{4\pi^2}\Delta\right)^k\cdot T_{\mathfrak{F}\nu}=\left(1-\frac{1}{4\pi^2}\Delta\right)^k\cdot\mathfrak{F}T_\nu$$

だから (11·20) と同じく

$$\begin{aligned}\mathfrak{F}^*T&=(1+|y|^2)^k\cdot\mathfrak{F}^*\mathfrak{F}T_\nu\\&=(1+|y|^2)^kT_\nu \quad (\text{諸公式 (i) により } \mathfrak{F}^*\mathfrak{F}T=T)\end{aligned}$$

故に $\mathfrak{F}^*T$ は緩増加な正測度 $\mu(dy)=(1+|y|^2)^k\nu(dy)$ によって定義された超函数になり，前定理によって T は正型である．（終）

系 $m>0$ ならば T_{r^m} は正型の超函数である．

（証明） $m-2k+n-1<-1$ なるように正整数 k を大きくとって

$$\nu(dx)=f_k(r)dx=\frac{r^m}{(1+r^2)^k}dx, \qquad r=|x|$$

ととれば (11·24) によって

$$\mathfrak{F}T_{r^m}=\left(1-\frac{1}{4\pi}\Delta\right)^k T_{\mathfrak{F}\nu}$$

となるからである．(終)

11·6 スペクトル・Paley–Wiener の定理の拡張

緩増加な超函数のスペクトルの定義　超函数 $T\in(\mathfrak{S}_x)'$ に対して，その Fourier 変換 $\mathfrak{F}T\in(\mathfrak{S}_y)'$ をつくって，$\mathfrak{F}T$ の台を **T のスペクトル**という．これは $y=(y_1,\cdots,y_n)$ の集合で R^n の閉集合をなすわけである．

そのスペクトルがただ一つの点 $y^{(0)}$ から成る緩い超函数 T を考えよう．$\mathfrak{F}T=S=S_{(y)}$ の台が $y^{(0)}$ のみから成り立っているのであるから，定理 2·12 によって

$$S=\sum_{|q|\leqq p}C_pD^{(q)}T_{\delta_{y^{(0)}}},\quad D^{(q)}=\partial^{q_1+\cdots+q_n}/\partial x_1^{q_1}\cdots\partial x_n^{q_n}$$

の形である．故に Fourier 変換の諸公式 (i) と (iii) とから

$$T=\mathfrak{F}^*(\mathfrak{F}T)=\sum_{|q|\leqq p}C_q\mathfrak{F}^*(D^{(q)}T_{\delta_{y^{(0)}}})=\sum_{|q|\leqq p}C_q\prod_{k=1}^{n}(-2\pi\sqrt{-1}x_k)^{q_k}\mathfrak{F}^*(T_{\delta_{y^{(0)}}})$$
$$=\sum_{|q|\leqq p}C_q\prod_{k=1}^{n}(-2\pi\sqrt{-1}\,x_k)^{q_k}T_{\exp(+2\pi\sqrt{-1}x\cdot y^{(0)})}$$

を得る．故に

定理 11·7　緩増加な超函数 T のスペクトルが有限個の点 $y^{(1)},y^{(2)},\cdots,y^{(k)}$ から成るための必要かつ十分な条件は，T が多項式 $P(x)$ によって

$$T=T_f,\quad f(x)=\sum_{i=1}^{k}P_i(x)\exp(-2\pi\sqrt{-1}\,x\cdot y^{(i)})\qquad(11\cdot34)$$

と書き表わされることである．

また

定理 11·7′　緩増加な超函数 T のスペクトルが空集合であるための必要かつ十分な条件は $T=0$ なることである．

(証明)　$\mathfrak{F}T=0$ なるための必要かつ十分な条件は $T=\mathfrak{F}^*\mathfrak{F}T=0$ であるからである．(終)

11·7 スペクトルがコンパクト集合をなすような緩増加超函数．Paley–Wiener の定理の拡張

定理 11·8　緩増加な超函数Tに対して次の二条件は同等である：

（Ⅰ） $\mathfrak{F}T=S$ とするとき $S_{(y)}$ の台が

$$|y_1|\leqq C,\ |y_2|\leqq C,\cdots,|y_n|\leqq C$$

に含まれる．

（Ⅱ） R^n の連続函数 $F(x)$ で，この函数を複素変数 $y=x+\sqrt{-1}\xi$ に対して指数型 $\leqq 2\pi C$ の整函数に拡張できるような $F(x)$ が存在して $T=T_{F(x)}$.

[Paley-Wiener の定理の拡張]

（証明） 簡単のために $n=1$ の場合だけ証明する．一般の n に対しても同様である．

（Ⅰ）→（Ⅱ）：$\mathfrak{F}T=S=S_{(y)}$ の台が閉区間 $[-C,C]$ に含まれるから，定理 2·11 によって，任意の $\varepsilon>0$ に対して

$$S_{(y)}=\sum_{q\leqq p}c_q\frac{d^q}{dy^q}T_{f_q(y)}$$

と書ける．ただし $f_q(y)$ の台は閉区間 $[-C-\varepsilon,C+\varepsilon]$ に含まれる．故に

$$T=\mathfrak{F}^*S=\sum_{q\leqq p}c_q\mathfrak{F}^*\left(\frac{d^q}{dy^q}T_{f_q(y)}\right)$$

であるが，Fourier 変換の諸公式 (iii) によって

$$\mathfrak{F}^*\left(\frac{d^q}{dy^q}T_{f_q(y)}\right)=(-2\pi\sqrt{-1}\,x)^q(\mathfrak{F}^*T_{f_q(y)})=(-2\pi\sqrt{-1}\,x)^qT_{(\mathfrak{F}^*f_q)(x)}$$
$$=T_{(-2\pi\sqrt{-1}x)^q(\mathfrak{F}^*f_q)(x)} \tag{11·35}$$

となる．ところが car.(f_q) が $[-C-\varepsilon,C+\varepsilon]$ に含まれるから

$$(\mathfrak{F}^*f_q)(x)=\int_{-\infty}^{\infty}f_q(y)\exp(2\pi\sqrt{-1}\,yx)dy$$
$$=\int_{-C-\varepsilon}^{C+\varepsilon}f_q(y)\exp(2\pi\sqrt{-1}\,yx)dy$$

であり，したがって

$$F_q(z)=\int_{-C-\varepsilon}^{C+\varepsilon}f_q(y)\exp(2\pi\sqrt{-1}\,yz)dy$$

は指数型 $\leqq 2\pi(C+\varepsilon)$ の整函数になる．まず任意の複素数 z に対して $z=x+i\xi$ として

$$|F_q(z)| \leqq \int_{-C-\varepsilon}^{C+\varepsilon} |f_q(y)| \exp(-2\pi y\cdot\xi)dy < \infty \tag{11・36}$$

であるから $(\mathfrak{F}^* f_q)(x)$ の拡張 $F_q(z)$ が定義される．同じく積分記号のもとで z に関して偏微分した

$$\int_{-C-\varepsilon}^{C+\varepsilon} f_q(y) 2\pi\sqrt{-1}\, y\cdot\exp(2\pi\sqrt{-1}\, y\cdot z)dy$$

は，z が z 平面の有界閉集合を動くときに一様収束する：

$$\left|\int_{-C-\varepsilon}^{C+\varepsilon} f_q(y) 2\pi\sqrt{-1}\, y\cdot\exp(2\pi\sqrt{-1}\, y\cdot z)dy\right|$$
$$\leqq \int_{-C-\varepsilon}^{C+\varepsilon} 2\pi|yf_q(y)|\exp(-2\pi y\cdot\xi)dy < \infty\cdot$$

よって $F_q(z)$ は整函数である．

また $z=x+i\xi$, $-C-\varepsilon \leqq y \leqq C+\varepsilon$ なるとき

$$\exp(-2\pi y\cdot\xi) \leqq \exp(2\pi(C+\varepsilon)|\xi|) \leqq \exp(2\pi(C+\varepsilon)|z|)$$

であるから，(11・36) によって

$$|F_q(z)| \leqq \exp(2\pi(C+\varepsilon)|z|)\int_{-C-\varepsilon}^{C+\varepsilon} |f_q(y)|dy$$

すなわち $F_q(z)$ は指数型 $\leqq 2\pi(C+\varepsilon)$ である．$\varepsilon>0$ は任意であったから $F_q(z)$ は指数型 $\leqq 2\pi C$. よって $(-2\pi\sqrt{-1}\,z)^q F_q(z)$ も指数型 $\leqq 2\pi C$ の整函数である．

故に，(11・36) によって，T は指数型 $\leqq 2\pi C$ の整函数に拡張されるような x の函数有限個の和によって定義された超函数となって（II）がいえたわけである．

（II）→（I）：二段に分ける．第一段；$f(x)$ を緩増加な C^∞ 函数，すなわちすべての $D^{(p)}$ に対して $D^{(p)}f(x)$ が，多項式と有界連続函数の積の形になっているとして $T=T_{f(x)}$ なる場合を考える．仮定によって指数型 $\leqq 2\pi C$ の整函数 $F(z)$ に対して $F(x)=f(x)$.

$\psi(y)\in(\mathfrak{D}_y)$ の台が

$$|y_1| \leqq \varepsilon, |y_2| \leqq \varepsilon, \cdots, |y_n| \leqq \varepsilon$$

に含まれるとして，$(\mathfrak{F}^*\psi)(x)=\varphi(x)$ をつくれば，定理 10·6 によって $\varphi(x)\in(\mathfrak{S}_x)$ でかつ指数型 $\leqq 2\pi\varepsilon$ の整函数 $\Phi(z)$ に対して $\Phi(x)=\varphi(x)$.
故に

$$\Phi(z)F(z) \text{ は指数型 } \leqq 2\pi(C+\varepsilon) \text{ の整函数} \tag{11·37}$$

である．

ところで S の ψ による正則化 $S*T_\psi$ に対して $(\mathfrak{F}^*\chi)(x)\in(\mathfrak{D}_x)$ ならば

$$[\mathfrak{F}^*(S*T_\psi)](\chi)=(S*T_\psi)(\mathfrak{F}^*\chi)$$
$$=(S_{(t)}\times T_{\psi(x)})\left(\int_{R^n}\chi(y)\exp(2\pi\sqrt{-1}\,y\cdot(x+t))dy\right)$$
$$=S_{(t)}\left\{\int_{R^n}\chi(y)\exp(2\pi\sqrt{-1}\,y\cdot t)\left(\int_{R^n}\psi(x)\exp(2\pi\sqrt{-1}\,y\cdot x)dx\right)dy\right\}$$
$$=S_{(t)}\left\{\int_{R^n}\chi(y)\varphi(y)\exp(2\pi\sqrt{-1}\,y\cdot t)dy\right\}$$
$$=(\mathfrak{F}^*S)(\varphi\chi)=T_f(\varphi\chi)=T_{f\varphi}(\chi) \tag{11·38}$$

を得る．ところが $f(x)$ が緩増加で $\varphi(x)$ が急減少であるから $f(x)\varphi(x)$ は急減少な函数である．故に (11·37) と Paley–Wiener の定理 10·6 によって

$$\mathfrak{F}T_{f\varphi}=T_{\mathfrak{F}(f\varphi)}=T_g$$

における $g(y)=\mathfrak{F}(f\varphi)(y)$ の台は

$$|y_1|\leqq(C+\varepsilon),\ |y_2|\leqq(C+\varepsilon),\ \cdots,\ |y_n|\leqq(C+\varepsilon) \tag{11·39}$$

に含まれる．$T_{f\varphi}=\mathfrak{F}^*\mathfrak{F}T_{f\varphi}=\mathfrak{F}^*T_g=T_{\mathfrak{F}^*g}$ であるから，(11·38) および

$$S*T_\psi=T_{\tilde\psi},\quad \tilde\psi(y)=S_{(t)}\psi(y-t)$$

によって，

$$(\mathfrak{F}^*\chi)(x)\in(\mathfrak{D}_x) \text{ ならば } T_{\tilde\psi}(\mathfrak{F}^*\chi)=T_{\mathfrak{F}^*g}(\chi)=T_g(\mathfrak{F}^*\chi)$$

を得て，$\tilde\psi(x)=g(x)$ でなければならない．

かくして S の正則化 $S*T_\psi=T_{\tilde\psi}$ の台が (11·39) に含まれることがわかった．したがって正則化の極限として S の台は (11·39) に含まれる．$\varepsilon>0$ は任意であったから（I）がいえたわけである．

第二段；指数型 $\leqq 2\pi C$ の整函数 $F(z)$ から $F(x)=f(x)$ として得られ

るような連続函数 $f(x)$ に対して $T=T_{f(x)}$ となっているとする. $T=T_f$ が緩増加な超函数であるから, 定理 11·3 からわかるように, $|x|\to\infty$ なるとき $|f(x)|=O(|x|^k)$ なるような正整数 k がある. 故に $T=T_f$ の正則化

$$T*T_\psi=T_f*T_\psi=T_{\tilde f},\qquad \tilde f(x)=\int_{R^n} f(t)\psi(x-t)dt$$

は緩増加な函数である. しかも $\tilde f(x)$ の複素数値 z への拡張

$$\tilde F(z)=\int_{R^n} F(z-t)\psi(t)dt$$

は, $|z|\to\infty$ なるとき $F(z)$ の指数型 $\leqq 2\pi C$ ということから,

$$|\tilde F(z)|\leqq \exp(2\pi C(|z|+\varepsilon))\int_{R^n}|\psi(t)|dt$$

となり, $\tilde F(z)$ は指数型 $\leqq 2\pi(C+\delta)$, δ は任意の正数, の整函数になる.

故に第一段によって $T_{\tilde f}$ の Fourier 変換 $(\mathfrak{F}T_{\tilde f})$ の台は

$$|y_1|\leqq C+\delta,\ |y_2|\leqq C+\delta,\ \cdots,\ |y_n|\leqq C+\delta \tag{11·40}$$

に含まれる. 一方において $(\mathfrak{F}\chi)(x)\in(\mathfrak{D}_x)$ ならば, $T_{\psi_h}\to T_\delta\ ((\mathfrak{D}_x)')$ なるとき

$$(T*T_{\psi_h})(\mathfrak{F}\chi)\to T(\mathfrak{F}\chi),\ \text{すなわち}$$
$$(\mathfrak{F}(T*T_{\psi_h}))(\chi)\to(\mathfrak{F}T)(\chi) \tag{11·41}$$

ところが上に示したごとく $\mathfrak{F}(T*T_{\psi_h})=\mathfrak{F}(T_f*T_{\psi_h})=\mathfrak{F}T_{\tilde f}$ の台はすべて (11·40) に入ってると考えてよいから, χ の台が (11·40) の外にあるときは, (11·41) の左辺の各項はすべて 0 で $(\mathfrak{F}T)(\chi)=0$.

よって $\mathfrak{F}T$ の台は (11·40) に含まれ, $\delta>0$ が任意であったから (II) がいえたわけである. (終)

11·8 Parseval 公式

$(\mathfrak{S}_{R^n})$ に属する函数の Fourier 変換に関する Parseval 公式 (10·24) は緩増加な超函数の Fourier 変換の場合に次のようにして拡張される.

緩増加な C^∞ 函数の空間 $(\mathfrak{O}_M)$ および急減少な超函数の空間 $(\mathfrak{O}_C')$ の定義　さきに (§ 11·1) 緩増加な C^∞ 函数 $\varphi(x)$ とは, $(\mathfrak{E}_{R^n})$ に属しそのすべ

ての導函数 $D^{(p)}\varphi(x)$ が多項式と有界連続函数との積として与えられるような $\varphi(x)$ と定義した．かかる函数の全体を（$\mathfrak{O}_M$）と書く．次に超函数 T は，いかなる $k\geqq 0$ についても T が連続函数の（超函数の意味での）何回かの導函数の和によって与えられる超函数でかつこれらの連続函数と $(1+|x|^2)^k$ との積はいずれも R^n の上で有界な函数になるときに T を**急減少な超函数**という．このような超函数の全体を（$\mathfrak{O}_C'$）と書く．（$\mathfrak{O}_M$）も（$\mathfrak{O}_C'$）もともにベクトル空間であり，かつ

$$\left.\begin{array}{l} f(x)\in(\mathfrak{O}_M)\ \text{ならば}\ T_f\in(\mathfrak{S}_{R^n})' \\ \text{また}\ T\in(\mathfrak{O}_C')\ \text{ならば}\ T\in(\mathfrak{S}_{R^n})' \end{array}\right\} \tag{11·42}$$

なることは，定理 11·3 からわかる．

しかして $(\mathfrak{D}_{R^n})'$ における畳み込みの概念を $S\in(\mathfrak{O}_C')$, $T\in(\mathfrak{S}_{R^n})'$ の畳み込みの概念にまで次のように拡張し得ることがいえる．すなわち

$$\varphi\in(\mathfrak{S}_{R^n})\ \text{に対して}\ (S*T)(\varphi)=(S_{(x)}\times T_{(y)})(\varphi(x+y)) \tag{11·43}$$

によって $(\mathfrak{S}_{R^n})'$ に属する $(S*T)$ が定義される．

この畳み込みを使うと Parseval 公式は次のように拡張される．すなわち

$$\left.\begin{array}{l} S=T_f,\ f\in(\mathfrak{O}_M),\ T\in(\mathfrak{S}_{R^n})'\ \text{ならば} \\ \mathfrak{F}S=\mathfrak{F}T_f\in(\mathfrak{O}_C'),\ \mathfrak{F}T\in(\mathfrak{S}_{R^n})'\ \text{かつ}\ \mathfrak{F}(f\cdot T)=(\mathfrak{F}T_f)*(\mathfrak{F}T) \end{array}\right\} \tag{11·44}$$

$$\left.\begin{array}{l} S\in(\mathfrak{O}_C'),\ T\in(\mathfrak{S}_{R^n})'\ \text{ならば} \\ \mathfrak{F}S=T_f,\ f\in(\mathfrak{O}_M),\ \mathfrak{F}T\in(\mathfrak{S}_{R^n})'\ \text{かつ}\ \mathfrak{F}(S*T)=f\cdot(\mathfrak{F}T) \end{array}\right\} \tag{11·45}$$

これらの Parseval 公式を用いれば前 § の証明の一部分は簡単になるのであるが，ここでは Parseval 公式の証明は省くことにする．

ついでながら R^1 において考えると，$f(x)=\exp(\pi\sqrt{-1}\,x^2)$ は $\in(\mathfrak{O}_M)$ であり，かつ $T_f\in(\mathfrak{O}_C')$ であることを証明することができる．この $f(x)$ の m 階導函数が $\exp(\pi\sqrt{-1}\,x^2)$ と m 次のある多項式との積になることを使って証明されるのである．これはまた Parseval 公式と次式からもわかる．

$$\mathfrak{F}T_{f(x)}=\frac{1+\sqrt{-1}}{\sqrt{2}}T_{\hat{f}(y)},\quad \hat{f}(y)=\exp(-\pi\sqrt{-1}\,y^2)$$

第 12 章　偏微分方程式への応用例

二三の例によって超函数の理論が偏微分方程式論の研究に有効なことを示したいと思う.

12.1　Liouville の定理の一般化

高階 Laplace 方程式

$$\Delta^k T=0 \tag{12·1}$$

を考える. この方程式の解を**重調和** (polyharmonic) 超函数という.

定理 12·1　緩増加な重調和超函数 T は多項式 $P(x)$ によって定義された $T_{P(x)}$ の形のもの以外に存在しない.

(証明)　緩増加な超函数 T が (12·1) を満足するとし $\mathfrak{F}T=S$ とおく. Fourier 変換の諸公式 (iii) における

$$\mathfrak{F}\left(\frac{\partial T}{\partial x_k}\right)=2\pi\sqrt{-1}\,y_k(\mathfrak{F}T) \tag{12·2}$$

を繰返し用いて

$$(-4\pi^2r^2)^k\cdot S=0, \qquad r=\left(\sum_{i=1}^n y_i^2\right)^{1/2} \tag{12·3}$$

を得る. よって S の台は原点 $y_1=y_2=\cdots=y_n=0$ だけである.　故に定理 2·12 によって $S=\sum_{|q|\leqq p} c_q D^{(q)}T_\delta$ の形になり, Fourier 変換の諸公式

$$\mathfrak{F}\left(\frac{\partial}{\partial x_k}T_\delta\right)=T_{2\pi\sqrt{-1}y_k},\ \text{したがって}\ \mathfrak{F}^*\left(\frac{\partial}{\partial x_k}T_\delta\right)=T_{-2\pi\sqrt{-1}y_k} \tag{12·4}$$

を繰返し用いて, $T=\mathfrak{F}^*S$ は多項式 $P(x)$ によって $T=T_{P(x)}$ と表わされなければならないことがわかる. (終)

結局緩増加という条件をつけると, 多項式 $P(x)$ で

$$\Delta^k P(x)=0 \tag{12·1$'$}$$

を満足するものすなわち, いわゆる**重調和多項式** $P(x)$ によって $T=T_{P(x)}$ と与えられるもの以外に (12·1) の解超函数は存在しない. この意味で定理

12·1 を **Liouville 定理の一般化**ということにする．ついでながら $k=1$ のとき (12·1)′ の解になる m の齊次多項式 $P(x)$ を

$$P(x)=|x|^m Q(x)$$

と書いた $Q(x)$ が R^n の単位球面 $\{x\,;|x|=1\}$ 上で定義せられた m 次の**球調和函数** (spherical harmonics) とよばれるものである．

12.2 Paley–Wiener の定理の応用

定数係数の線形偏微分方程式

$$DT=\sum_{|q|\leqq p} c_q D^{(q)} T=0,\ (c_p\neq 0) \tag{12·5}$$

を考える．

定理 12·2 (12·5) の解超函数 T でコンパクトな台をもつものは $T=0$ 以外に存在しない．

(証明) Paley–Wiener の定理 11·8 によって，T の Fourier 変換 $\mathfrak{F}T=S=S_{(y)}$ は，指数型の整函数 $F(z)=F(z_1, z_2, \cdots, z_n)$ において複素数 z_j を実数 y_j とおきかえた函数 $F(y)$ により

$$S_{(y)}=T_{F(y)}$$

と与えられるはずである．一方 (12·2) を繰返し用いて，y のある多項式 $P(y)\neq 0$ に対し

$$P(y)\cdot T_{F(y)}=T_{P(y)\cdot F(y)}=0$$

となる．$P(y)\neq 0$ であるから，ある開集合 $\subseteq R^n$ において $F(y)\equiv 0$ とならなければならず，したがって F の解析函数であることから R^n において $F(y)\equiv 0$. 故に $S=0$ となり $T=\mathfrak{F}^* S=0$.

この定理から次の興味ある定理を導くことができる．

定理 12·3 R^n のコンパクトな集合 V の境界超曲面 ∂V が局所的に p 回連続微分可能な函数によって定義されているとする．p 回連続微分可能な函数 $f(x)=f(x_1, \cdots, x_n)$ が

$$Df(x)=0 \tag{12·5)′}$$

の解になっており，かつ ∂V の上では $f(x)$ の $(p-1)$ 回までの偏導函数がす

べて 0 であるとするならば，$f(x)$ は V においては恒等的に 0 である．

（証明）R^n で定義せられた函数 $f_1(x)$ を

$$f_1(x)=\begin{cases} f(x), & x\in V \\ 0\ , & x\notin V \end{cases}$$

によって定義する．このときすべての $\varphi(x)\in(\mathfrak{D}_{R^n})$ に対して

$$\int_{R^n} f_1(x)D^*\varphi(x)=0,\ \ D^*=\sum_{|q|\leqq p} c_q(-1)^{|q|}D^{(q)}$$

の成り立つことを証明できる．$\int_{R^n} f_1(x)D^*\varphi(x)dx=\int_V f(x)\cdot D^*\varphi(x)dx$ に部分積分をほどこし ∂V における $f(x)$ の境界条件を使えば $=\int_V Df(x)\cdot\varphi(x)dx=0$ となるから，これは (12·5) によって $=0$ となるのである．

故に $DT_{f_1}=0$ となり，前定理によって $T_{f_1}=0$ すなわち $f_1(x)\equiv 0$ となり $f(x)$ は V において $\equiv 0$ である．

12·3 素解を求めること

例をもって説明しよう．　$D=\left(I-\dfrac{\Delta}{4\pi^2}\right)^k$ とし

$$DT=T_\delta$$

なる D の素解 T を求める．T の Fourier 変換を $\mathfrak{F}T=S$ とすると，$\mathfrak{F}T_\delta=T_1$ および (12·2) を繰返したものから

$$(1+|y|^2)^k\cdot S_{(y)}=T_1$$

を得る．よって $S_{(y)}=T_{1/(1+|y|^2)^k}$ となる．これは明らかに緩増加な超函数であるからこれの Fourier 変換 $\mathfrak{F}^*S_{(y)}$ として求める素解 T が得られる．実際に古典的な Fourier 変換の公式で

$$\mathfrak{F}^*\frac{1}{(1+|y|^2)^k}=\frac{2\pi^k}{(k-1)!}|x|^{k-n/2}K_{n/2-k}(2\pi|x|)^{1)}$$

となるのであるから[2]，素解 T がこの函数によって定義せられた超函数とし

1) K は Hankel 函数

2) 例えば S. Bochner : Vorlesungen über Fouriersche Integrale, Leipzig (1932), p. 187 参照のこと

て具体的に得られたわけになる．

なお Leon Ehrenpreis[1]は超函数 $T\epsilon(\mathfrak{D}_{R^n})'$ の Fourier 変換を詳しく調べることによって，任意の定数係数の線形偏微分方程式についてその素解の存在を証明した．ここに $T\epsilon(\mathfrak{D}_{R^n})'$ の Fourier 変換 $\mathfrak{F}T$ は，Paley-Wiener の定理 10·6 により，

$$\mathfrak{F}T(\varphi)=T(\mathfrak{F}\varphi), \qquad (\mathfrak{F}\varphi)(x)\epsilon(\mathfrak{D}_{R^n})$$

によって，指数型の整函数 $F(z)$ において $z=x$ とおいた $\varphi(x)$ の上で定義せられた汎函数 $\mathfrak{F}T$ として定義するのである．詳しくは Ehrenpreis の原論文をみられたい．

12.4 $(I-\lambda\Delta)u=f$ を解くこと

$\lambda>0$ とし $(\mathfrak{D}_{R^n})$ に属する二つの函数 $v(x), w(x)$ に対して，二つの異なる内積 $(v,w),(v,w)_1$ を定義することができる．

$$(v,w)=\int_{R^n} v(x)\overline{w(x)}dx \tag{12·6}$$

$$(v,w)_1=(v,w)+\lambda\int_{R^n}\left(\sum_{i=1}^n\frac{\partial v}{\partial x_i}\cdot\frac{\partial \overline{w}}{\partial x_i}\right)dx \tag{12·7}$$

$v(x)$ の台がコンパクトであるから，部分積分で容易にわかるように

$$(v,w)_1=(v-\lambda\Delta v,w)=(v,w-\lambda\Delta w) \tag{12·7$'$}$$

である．

$$\int_{R^n}\Delta v(x)\cdot\overline{w(x)}dx=-\int_{R^n}\left(\sum_{i=1}^n\frac{\partial v}{\partial x_i}\cdot\frac{\partial \overline{w}}{\partial x_i}\right)dx$$

となるからである．これらの内積に対するノルムについて

$$\|v\|_1\geqq\|v\| \quad すなわち \quad (v,v)_1\geqq(v,v) \tag{12·8}$$

が成り立つ．これらのノルム $\|v\|_1$ および $\|v\|$ について $(\mathfrak{D}_{R^n})$ を完備化した Hilbert 空間をそれぞれ H_1 および H とすると，H_1 のノルム $\|\ \|_1$ および H のノルム $\|\ \|$ についても (12·8) が成り立つ．

1) Solution of some problems of division, Amer. J. of Math. 76 (1954), 883–903.

任意に $f\in(\mathfrak{D}_{R^n})$ を定める．H_1 に属する v をとり，(v,f) をつくり $L(v)=(v,f)$ を H_1 の上の加法的汎函数と考えると，Schwarz の不等式および (12·8) で

$$|L(v)|=|(v,f)|\leqq\|v\|\cdot\|f\|\leqq\|v\|_1\cdot\|f\|_1$$

となるから，F. Riesz の定理（附録）で $f'\in H_1$ が存在してすべての $v\in H_1$ に対し

$$L(v)=(v,f)=(v,f')_1. \tag{12·9}$$

よってもちろんすべての $v\in(\mathfrak{D}_{R^n})$ に対して

$$(v,f)=(v,f')_1 \tag{12·9$'$}$$

ところで f' は $(\mathfrak{D}_{R^n})$ のノルム $\|\ \ \|_1$ による完備化として得られた Hilbert 空間 H_1 の点であるから，$(\mathfrak{D}_{R^n})$ の点列 $\{f_h\}$ で $\lim_{h\to\infty}\|f'-f_h\|_1=0$ なるようなものが存在する．

$$|(v,f')_1-(v,f_h)|=|(v,f'-f_h)_1|\leqq\|v\|_1\cdot\|f'-f_h\|_1$$

であるから，

$$(v,f')_1=\lim_{h\to\infty}(v,f_h)_1 \tag{12·10}$$

しかも，v および f_h が $(\mathfrak{D}_{R^n})$ に属するから (12·7)$'$ によって

$$(v,f_h)_1=(v-\lambda\Delta v,f_h) \tag{12·11}$$

しかして，(12·8) と $\lim_{h\to\infty}\|f'-f_h\|_1$ とによって $\lim_{h\to\infty}\|f'-f_h\|=0$ となるから，(12·10) を得たと同じようにして (12·10)，(12·11) から

$$(v,f')_1=\lim_{h\to\infty}(v,f_h)_1=\lim_{h\to\infty}(v-\lambda\Delta v,f_h)=(v-\lambda\Delta v,f')$$

故に結局，(12·9) から

すべての $v\in(\mathfrak{D}_{R^n})$ に対して $(v,f)=(v-\lambda\Delta v,f')$

超函数の言葉でいえば，与えられた T_f（ただし $f\in(\mathfrak{D}_{R^n})$）に対して

$$(I-\Delta\lambda)T_{f'}=T_f \tag{12·12}$$

が解けて，$f'\in H_1$ による超函数 $T_{f'}$ がその一つの解であるわけである．

ところが $f'(x)$ は無限回偏微分可能函数と考えることができる．以下その証明を与えよう

§ 7·1 におけると同じく，ラプラシアン Δ のパラメトリックス $T_{p_n(x)}$ を考える．

$$\Delta T_{p_n}=T_\delta+T_g,\qquad g\in(\mathfrak{D}_{R^n})$$

によって

$$(1-\lambda\Delta)(T_{f'}*T_{p_n})=\{(1-\lambda\Delta)T_{f'}\}*T_{p_n}=T_f*T_{p_n},$$

$$\begin{aligned}(1-\lambda\Delta)(T_{f'}*T_{p_n})&=T_{f'}*\{(1-\lambda\Delta)T_{p_n}\}=T_{f'}*\{T_{p_n}-\lambda T_\delta-\lambda T_g\}\\&=T_{f'}*T_{p_n}-\lambda T_{f'}-\lambda T_{f'}*T_g\end{aligned}$$

を得て，

$$T_{f'}=\lambda^{-1}T_{f'*p_n}-\{\lambda^{-1}T_{f*p_n}+T_{f'*g}\}\tag{12·13}$$

$f(x)$ も $g(x)$ も $(\mathfrak{D}_{R^n})$ に属するから，右辺第二項は無限回偏微分可能函数

$$-\lambda^{-1}f*p_n(x)-f'*g(x)$$

によって定義せられた超函数になる．また $p_n(x)$ は，$C(x)$ を $x=0$ の近傍で 1 になるような函数 $\in(\mathfrak{D}_{R^n})$ として

$$\begin{aligned}p_n(x)&=(2-n)^{-1}\Omega_{n-1}^{-1}C(x)|x|^{2-n}\quad &(n\geqq 3\text{ のとき})\\&=(2\pi)^{-1}C(x)\log|x| &(n=2\text{ のとき})\end{aligned}$$

で与えられるから，$f'*p_n(x)$ は連続函数である．H_1 に属するということから $f'(x)$ はもちろん局所有界であるからである．次に連続函数 $f'(x)$ との畳み込みとして $f'*p_n(x)$ は C^1 である．これは $r=|y-x|$ として

$$\frac{\partial}{\partial x_i}f'*r^{2-n}(x)=\int_{R^n}f'(y)|y-x|^{-n}(x_i-y_i)dy$$

というようになるから，$dy=r^{n-1}\cdot dr\cdot d\Omega_{n-1}$ を使えばわかる．よってまた定理 6·2 の証明におけるごとくして $f'*p_n(x)$ は C^2 である．同じくこれから，定理 6·2 の証明におけるごとく部分積分によって $f'*p_n(x)$ は C^3 であることがわかる．以下同様に繰返して $f'*p_n(x)$ が C^∞ になり，したがって (12·13) から $f'(x)$ が C^∞ 函数と考えてよいことがわかった．

かくして (12·12) から，$f'(x)$ が与えられた $f(x)\in(\mathfrak{D}_{R^n})$ に対して

$$(1-\lambda\Delta)f'(x)=f(x)\tag{12·12$'$}$$

の C^∞ 函数解となりしかも $f'(x)\in H_1$ であることがわかった．

注　H_1 に属するような $(12\cdot 12)'$ の C^∞ 函数解は上に得られた $f'(x)$ 以外に存在しない．他にかかる解が存在したとし，これと $f'(x)$ との差 $f''(x)$ を考えると

$$(I-\lambda\varDelta)f''(x)=0, \qquad f''\in H_1$$

故に $((I-\lambda\varDelta)f'', f'')=0$ であるが，この左辺は $\|f''\|_1^2$ に等しいことが定理の証明中におけると同様にしてわかるから $f''=0$ でなければならない．

上のように，Hilbert 空間または Banach 空間の函数解析的方法によって与えられた偏微分方程式の超函数解をもとめ，次にこの解が十分な回数だけ偏微分可能なことを示すことによってこの解が実は初めの偏微分方程式の普通の解であることを示すこと，これが最近数年間にだんだん一般的になってきた解の存在証明法である．この方法は一般の楕円形方程式のみならず放物形や双曲形方程式にも有効なことが示されつつあるのである[1]．

1)　例えばさきに挙げた Lions の論文や筆者；semi-group の理論による波動方程式の積分，(数学に近刊)，などをみよ．

附　　録

本文中において，完備な距離空間に関する Baire–Hausdorff の定理や Hilbert 空間に関する Riesz の定理がしばしば基本的な役割りをつとめた．この附録においては，距離空間や Hilbert 空間の定義から始めてそれ等の定理に証明を与えて本講座の通読に便ならしめたい．もちろん，これらについては講座中の位相幾何学や位相解析に詳しく解説せられるはずであるから，それ等における講義をも参照せられたならば得るところが多いであろう．

1　距離空間・pre–Hilbert 空間

距離空間の定義　集合 X の任意の二元 x, y に対して，次の条件を満足するような実数 $\mathrm{dis}(x, y)$ が定義せられているとする：

$$\left.\begin{array}{l}\mathrm{dis}(x, y) \geqq 0 \text{ かつ } x=y \text{ と } \mathrm{dis}(x, y)=0 \text{ とは同等,} \\ \mathrm{dis}(x, y)=\mathrm{dis}(y, x), \\ \mathrm{dis}(x, y)+\mathrm{dis}(y, z) \geqq \mathrm{dis}(x, z) \quad \text{(三角不等式)}\end{array}\right\} \tag{1·1}$$

この $\mathrm{dis}(x, y)$ を X の二点 x, y の**距離** (distance) といい，X はこの距離によって**距離空間** (metric space) であるという．

X の点列 $\{x_n\}$ が X の点 x に収束する．または x を極限とするというのは

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{dis}(x_n, x)=0 \tag{1·2}$$

が成り立つことをいう．この収束の概念によって距離空間 X に**閉集合**，**開集合**，**稠密**，**粗**などの位相空間的の概念が定義される．例えば X の部分集合 G が**開集合**であるというのは，G の各点 x_0 に対して十分小さな正数 $\varepsilon=\varepsilon(x_0, G)$ をとると，x_0 を中心として半径 ε の開球 $\{x \in X; \mathrm{dis}(x, x_0)<\varepsilon\}$ が G に含まれることをいう．また X の部分集合 F が**閉集合**であるというのは，F の補集合 $X-F$ が開集合であることである．このことはまた F の点列の極限はすべて F に属することと同等である．

なお X の閉集合 M は，X の空でないいかなる開集合をも含まないときに**粗** (non-dense) であるとよばれる．

連続写像　距離空間 X と距離空間 Y とが与えられたとき，X の各点 x に Y の点

y を対応させる対応 $T(Tx=y)$ を X から Y の中への**写像** (mapping) といい，写像 T の**連続性**を

$$\lim_{n\to\infty} \text{dis}(x_n, x)=0 \text{ ならば } \lim_{n\to\infty} \text{dis}(Tx_n, Tx)=0$$

によって定義する.

距離空間の例としての pre-Hilbert 空間 n 次元ユークリッド空間 R^n の部分集合 S を考える. S において定義せられた複素数値の連続函数 $\varphi(x)$ でその台が有界閉集合であるようなものの全体を $X=C^0(S)$ とする[1]. X は

$$(\varphi+\psi)(x)=\varphi(x)+\psi(x), \quad (a\varphi)(x)=a\varphi(x) \quad (a\text{は複素数})$$

の意味でベクトル空間をつくるが，X は次の距離の意味で距離空間になる：

$$\text{dis}(\varphi, \psi)=\sqrt{(\varphi-\psi, \varphi-\psi)},$$

ただし
$$(\varphi, \psi)=\int_S \varphi(x)\overline{\psi(x)}dx, \quad dx=dx_1\cdots dx_n \tag{1·3}$$

(証明) 明らかに $\text{dis}(\varphi, \psi)\geqq 0$. また $\text{dis}(\varphi, \psi)=0$ は $\int_S |\varphi(x)-\psi(x)|^2dx=0$ と同等であるから，$\varphi(x)-\psi(x)$ が連続函数であることから $\text{dis}(\varphi, \psi)=0$ は $\varphi(x)\equiv\psi(x)$ と同等である. ついでながら φ と ψ との**内積** (inner product) とよばれる (φ, ψ) が有限確定なことは $\varphi(x), \psi(x)$ がいずれも有界閉集合の外では恒等的に 0 なことからわかる.

内積 (φ, ψ) については

$$\left.\begin{aligned}
&(\varphi, \psi)=\overline{(\psi, \varphi)}\\
&(a\varphi, \psi)=a(\varphi, \psi), \text{ したがって } (\varphi, a\psi)=\bar{a}(\varphi, \psi)\\
&(\varphi, \varphi)\geqq 0 \text{ かつ } (\varphi, \varphi)=0 \text{ と } \varphi=0^{1)} \text{ とは同等}
\end{aligned}\right\} \tag{1·4}$$

が成り立つから

$$(\varphi, \varphi)^{1/2}=\|\varphi\| \quad (\text{したがって } \|a\varphi\|=|a|\cdot\|\varphi\|) \tag{1·5}$$

とおいて，任意の実数 a に対して a の二次式

$$(\varphi+a(\varphi, \psi)\psi, \varphi+a(\varphi, \psi)\psi)=\|\varphi\|^2+2a|(\varphi, \psi)|^2+a^2|(\varphi, \psi)|^2\cdot\|\psi\|^2\geqq 0$$

したがって

$$|(\varphi, \psi)|^4-\|\varphi\|^2\cdot|(\varphi, \psi)|^2\cdot\|\psi\|^2\leqq 0$$

を得て

---

1) X の点 x の座標を $x_1, x_2, \cdots, x_n$ とする. すなわち $x=(x_1, x_2, \cdots, x_n)$

2) $\varphi=0$ はベクトル空間 X の 0 ベクトル，すなわちこの場合は $\varphi(x)\equiv 0$.

$$|(\varphi,\psi)|\leqq\|\varphi\|\cdot\|\psi\| \quad (\text{Schwarz の不等式}) \tag{1·6}$$

が成り立つ．したがってまた

$$\|\varphi+\psi\|^2=(\varphi+\psi,\varphi+\psi)=\|\varphi\|^2+(\varphi,\psi)+(\psi,\varphi)+\|\psi\|^2$$
$$\leqq\|\varphi\|^2+2\|\varphi\|\cdot\|\psi\|+\|\psi\|^2=(\|\varphi\|+\|\psi\|)^2$$

すなわち

$$\|\varphi+\psi\|\leqq\|\varphi\|+\|\psi\|, \tag{1·7}$$

が証明せられるから，

$$\text{dis}(\varphi,\psi)=\|\varphi-\psi\|=\|\varphi-\chi+\chi-\psi\|\leqq\|\varphi-\chi\|+\|\chi-\psi\|$$
$$\leqq\text{dis}(\varphi,\chi)+\text{dis}(\chi,\psi)$$

も得られて X は距離空間になることがわかった．（終）

一般にベクトル空間 X の任意の二点 φ,ψ に対して (1·4) を満足する内積 (φ,ψ) が定義せられているとき，(1·5) によってノルム $\|\varphi\|$ を導入すると上のごとく (1·6), (1·7) がいえて X は距離 $\text{dis}(\varphi,\psi)=\|\varphi-\psi\|$ の意味で距離空間になる．この距離空間 X を **pre-Hilbert 空間**という．$X=C^0(S)$ がその例である．

2　完備な距離空間・Baire-Hausdorff の定理

完備性の定義　距離空間 X の点列 $\{x_n\}$ が X の点 x に収束するならば $\{x_n\}$ は **Cauchy の収束条件**

$$\lim_{n,m\to\infty}\text{dis}(x_n,x_m)=0 \tag{2·1}$$

を満足する．$\text{dis}(x_n,x_m)\leqq\text{dis}(x_n,x)+\text{dis}(x,x_m)$ であるからである．逆に (2·1) を満足する任意の点列 $\{x_n\}$ に対して，必ず X のなかに $\lim_{n\to\infty}\text{dis}((x_n,x)=0$ となるような $\{x_n\}$ の極限点 x があるときに X は**完備** (complete) な距離空間という．このときには極限点 x が点列 $\{x_n\}$ に対して一意的に定まることは三角不等式から明らかである．

距離空間が必ずしも完備ではないことは，X として有理数の全体をとって $\text{dis}(x,y)=|x-y|$ とすれば明らかである．

Baire-Hausdorff の定理　完備な距離空間 X は粗な閉集合 (non-dense closed set) の可算個の和集合 $X=\bigcup_{h=1}^{\infty}F_h$ として表わすことはできない．

（証明）F_h を X の粗な閉集合とし $X=\sum_{h=1}^{\infty}X_h$ となっていると仮定する．任意に空でない開集合 $G\subseteqq X$ をとったとき，F_1 が粗であるから開集合 $F_1{}^c=X-F_1$ は G_1 と共

通点をもつ．よって開集合 $F_1^c \cap G$ は半径 <1 なるごとき閉じた球[1] K_1 を含む．同じく F_2^c は K_1 の中に含まれるような半径 $<1/2$ の閉じた球 K_2 を含む．以下同様につづけて半径 $<1/h$ である閉じた球 K_h を得て

$$F_1 \cap G \supseteqq K_1 \supseteqq K_2 \supseteqq \cdots \supseteqq K_h \supseteqq K_{h+1} \supseteqq \cdots \text{かつ } K_h \subseteqq F_h^c \ (h=1, 2, \cdots)$$

とできる．K_h の中心を x_h とすれば $h>m$ なるとき $\mathrm{dis}(x_h, x_m) \leqq 1/m$, したがって X の完備性から $\lim_{m\to\infty} \mathrm{dis}(x_m, x)=0$ なるごとき X の点 x が存在する．

$$\mathrm{dis}(x_m, x) \leqq \mathrm{dis}(x_m, x_h) + \mathrm{dis}(x_h, x)$$

において $h\to\infty$ ならしめると，右辺第二項 $\to 0$, また右辺第一項は，$h>m$ ならば $K_h \subseteqq K_m$ だから，K_m の半径より小さい．故に $x \in \bigcap_{m=1}^{\infty} K_m$. したがって $K_m \subseteqq F_m^c$ から $x \in \bigcap_{m=1}^{\infty} F_m^c = \left(\bigcup_{m=1}^{\infty} F_m\right)^c = X - X$ を得て $x \notin X$ なる矛盾を得た．（終）

3 完備化．Hilbert 空間

完備化 (completion) 完備でない距離空間 X_0 に対して完備な距離空間 X を定めて X_0 は X の稠密な部分空間 X' と 1 対 1 かつ等距離的 (isometric) に対応するようにできる．すなわちこの 1 対 1 対応で

$$X_0 \ni x_0 \longleftrightarrow x'_0 \in X' \text{ とするとき } \mathrm{dis}(x_0, y_0) = \mathrm{dis}(x_0', y'_0)$$

が成り立つようにできる．このような完備距離空間 X は次の意味で一意的に定まる．すなわち上のような性質をもつ完備距離空間は X_0 と 1 対 1 かつ等距離的に対応する空間つまり距離空間としては X_0 と同じものと考えられるものの**閉苞**[2]として得られるからである．この意味で一意的に定まる X を X_0 の**完備化** (completion) という．

完備化の証明 有理数列の極限としてすべての実数を定義するのと同じ考えで証明される．すなわち X_0 の点列 $\{x_n\}$ で Cauchy の収束条件 (2·1) を満足しているようなものの全体を考える．このような $\{x_n\}$ と $\{x_n'\}$ が $\lim_{n\to\infty} \mathrm{dis}(x_n, x_n')=0$ を満足するとき $\{x_n\} \sim \{x_n'\}$ と書くことにすると，$\sim$ は**類別** (classification) の条件

$$\left.\begin{array}{l} \{x_n\} \sim \{x_n\}, \\ \{x_n\} \sim \{x_n'\} \text{ ならば } \{x_n'\} \sim \{x_n\} \\ \{x_n\} \sim \{x_n'\}, \{x_n'\} \sim \{x_n''\} \text{ ならば } \{x_n\} \sim \{x_n''\} \end{array}\right\} \qquad (3\cdot 1)$$

1) $\{x \in X\,;\, \mathrm{dis}(x, x_1) \leqq \varepsilon\}$ の形の集合（ただし $0<\varepsilon<1$）

2) 距離空間の部分集合 M に対して M の点列の極限をすべてつけ加へたものを M の閉苞という．

を満足する．上の最後の条件は三角不等式 $\mathrm{dis}(x_n, x_n'') \leqq \mathrm{dis}(x_n, x_n') + \mathrm{dis}(x_n', x_n'')$ からわかるわけである．よって関係 ～ によって互に結ばれている $\{x_n\}$——もちろん (2·1) を満足する $\{x_n\}$——の全体を一つの類にまとめて $\tilde{x}$ と名づけることにし，$\tilde{x}$ のごとき類の全体を X と書く．

（X が距離空間であることの証明） まず $\tilde{x}, \tilde{y}$ の代表 $\{x_n\}, \{y_n\}$ のとりかたに無関係に

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{dis}(x_n, y_n) \tag{3·2}$$

が存在することを証明する．三角不等式で

$$\mathrm{dis}(x_m, y_m) \leqq \mathrm{dis}(x_m, x_n) + \mathrm{dis}(x_n, y_n) + \mathrm{dis}(y_n, y_m)$$

だから $\mathrm{dis}(x_m, y_m) - \mathrm{dis}(x_n, y_n) \leqq \mathrm{dis}(x_m, x_n) + \mathrm{dis}(y_n, y_m)$．これは n と m とをいれかえても成り立つから，結局

$$|\mathrm{dis}(x_m, y_m) - \mathrm{dis}(x_n, y_n)| \leqq \mathrm{dis}(x_m, x_n) + \mathrm{dis}(y_m, y_n),$$

この右辺は $m, n \to \infty$ なるとき 0 に収束するから実数の完全性によって (3·2) が存在して有限である．次に $\{x_n'\} \sim \{x_n\}, \{y_n'\} \sim \{y_n\}$ とすると

$$\mathrm{dis}(x_n, y_n) \leqq \mathrm{dis}(x_n, x_n') + \mathrm{dis}(x_n', y_n') + \mathrm{dis}(y_n', y_n)$$

によって $\lim_{n\to\infty} \mathrm{dis}(x_n, y_n) \leqq \lim_{n\to\infty} \mathrm{dis}(x_n', y_n')$ を得る． 同様にして $\lim_{n\to\infty} \mathrm{dis}(x_n', y_n') \leqq \lim_{n\to\infty} \mathrm{dis}(x_n, y_n)$ も得られるから $\lim_{n\to\infty} \mathrm{dis}(x_n, y_n) = \lim_{n\to\infty} \mathrm{dis}(x_n', y_n')$．すなわち類 $\tilde{x}, \tilde{y}$ の代表 $\{x_n\}, \{y_n\}$ をどうとっても (3·2) は収束し，かつその極限値はこれ等代表のとりかたに無関係である．だから (3·2) によって $\mathrm{dis}(\tilde{x}, \tilde{y})$ なる値が一意的に定まるのであるが，X は $\mathrm{dis}(\tilde{x}, \tilde{y})$ で距離空間である．すなわち

まず $\mathrm{dis}(\tilde{x}, \tilde{y}) = \lim_{n\to\infty} \mathrm{dis}(x_n, y_n) \geqq 0$．また $\mathrm{dis}(\tilde{x}, \tilde{y}) = \lim_{n\to\infty} \mathrm{dis}(x_n, y_n) = 0$ であることと $\{x_n\} \sim \{y_n\}$ すなわち $\tilde{x} = \tilde{y}$ とは同等である．次に $\mathrm{dis}(\tilde{x}, \tilde{y}) = \lim_{n\to\infty} \mathrm{dis}(x_n, y_n) = \lim_{n\to\infty} \mathrm{dis}(y_n, x_n) = \mathrm{dis}(\tilde{y}, \tilde{x})$．　最後に　$\mathrm{dis}(\tilde{x}, \tilde{y}) = \lim_{n\to\infty} \mathrm{dis}(x_n, y_n) \leqq \lim_{n\to\infty} \mathrm{dis}(x_n, z_n) + \lim_{n\to\infty} \mathrm{dis}(z_n, y_n) = \mathrm{dis}(\tilde{x}, \tilde{z}) + \mathrm{dis}(\tilde{z}, \tilde{y})$ も成り立つ．

X が完備であることの証明 X の点列 $\{\tilde{x}_n\}$ が Cauchy の収束条件 $\lim_{n,m\to\infty} \mathrm{dis}(\tilde{x}_n, \tilde{x}_m) = 0$ を満足しているとしよう．各類 $\tilde{x}_n$ からその代表 $\{x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, \cdots, x_k^{(n)}, \cdots\}, x_k^{(n)} \in X_0$ を選ぶ．Cauchy の収束条件 $\lim_{k,m\to\infty} \mathrm{dis}(x_k^{(n)}, x_m^{(n)}) = 0$ によって，各 n に対して

$$\mathrm{dis}(x_{k_n}^{(n)}, x_m^{(n)}) \leqq \frac{1}{n} \quad (m \geqq k_n \text{ のとき}) \tag{3·4}$$

なるごとき k_n を選ぶことができる．そうすれば

$$\{x_{k_1}^{(1)}, x_{k_2}^{(2)}, \cdots, x_{k_n}^{(n)}, \cdots\} \tag{3·5}$$

は Cauchy の収束条件を満足しかつこれを含む類 $\tilde{x}$ が $\lim_{m\to\infty} \mathrm{dis}(\tilde{x}_n, \tilde{x})=0$ を満足することがいえる．そのために

$$\{x_{k_n}^{(n)}, x_{k_n}^{(n)}, \cdots, x_{k_n}^{(n)}, \cdots\}$$

をその一つの代表とするような $\tilde{X}$ の点を $\tilde{x}_{k_n}^{(n)}$ とおくと，(3·4) によって

$$\mathrm{dis}(\tilde{x}_n, \tilde{x}_{k_n}^{(n)})=\lim_{k\to\infty} \mathrm{dis}(x_k^{(n)}, x_{k_n}^{(n)})\leqq\frac{1}{n} \tag{3·6}$$

したがって，

$$\begin{aligned}\mathrm{dis}(x_{k_n}^{(n)}, x_{k_m}^{(m)})&=\mathrm{dis}(\tilde{x}_{k_n}^{(n)}, \tilde{x}_{k_m}^{(m)})\\ &\leqq \mathrm{dis}(\tilde{x}_{k_n}^{(n)}, \tilde{x}_n)+\mathrm{dis}(\tilde{x}_n, \tilde{x}_m)+\mathrm{dis}(\tilde{x}_m, \tilde{x}_{k_m}^{(m)})\\ &\leqq\frac{1}{n}+\mathrm{dis}(\tilde{x}_n, \tilde{x}_m)+\frac{1}{m}\to 0 \quad (n, m\to\infty)\end{aligned}$$

であり，(3·5) はある類 $\tilde{x}$ の代表の一つであることがわかった．しかも (3·6) から

$$\mathrm{dis}(\tilde{x}, \tilde{x}_n)\leqq\mathrm{dis}(\tilde{x}, \tilde{x}_{k_n}^{(n)})+\mathrm{dis}(\tilde{x}_{k_n}^{(n)}, \tilde{x}_n)\leqq\mathrm{dis}(\tilde{x}, \tilde{x}_{k_n}^{(n)})+\frac{1}{n}$$

を得るが，最右辺の第一項についていえば

$$\mathrm{dis}(\tilde{x}, \tilde{x}_{k_n}^{(n)})=\lim_{p\to\infty} \mathrm{dis}(x_{k_p}^{(p)}, x_{k_n}^{(n)})$$

は n とともにいくらでも小さくなる．(3·5) が Cauchy の収束条件を満足するからである．かくして $\lim_{n\to\infty} \mathrm{dis}(\tilde{x}, \tilde{x}_n)=0$ の証明と同時に

$$\{x, x, \cdots, x, \cdots\}$$

のごとき特別の形の代表をもつ X の点 $\tilde{x}$ の全体 X' が X において稠密であることもわかった． X の点 x に X' の点 $x\in\{x, x, \cdots, x, \cdots\}$ を対応させることにして完備化の証明が完了したわけである．

Hilbert 空間の定義 pre-Hilbert 空間 X がそのノルムによって定義せられた距離 $\mathrm{dis}(\varphi, \psi)=\|\varphi-\psi\|$ によって完備な距離空間になっているときに X を **Hilbert 空間**という．とくに：

完備でない pre-Hilbert 空間 X_0 を距離空間として上の方法で完備化したもの X は Hilbert 空間になる．

（証明）　X_0 の点列 $\{\varphi_n\}$ で Cauchy の収束条件 $\lim_{n,m\to\infty}\|x_n-x_m\|=0$ を満足するものをその一つの代表として含む類 $\tilde{\varphi}$ について，$\tilde{\varphi}$ と $\tilde{\psi}$ との内積は

$$(\tilde{\varphi},\tilde{\psi})=\lim_{n\to\infty}(\varphi_n,\psi_n)$$

によって定義するとよい．まず (φ_n,ψ_n) が $n\to\infty$ のとき収束することは

$$\begin{aligned}(\varphi_n,\psi_n)-(\varphi_m,\psi_m)&=(\varphi_n,\psi_n)-(\varphi_n,\psi_m)+(\varphi_n,\psi_m)-(\varphi_m,\psi_m)\\&=(\varphi_n,\psi_n-\psi_m)+(\varphi_n-\varphi_m,\psi_m)\end{aligned}$$

によって (1·6) を用い

$$|(\varphi_n,\psi_n)-(\varphi_m,\psi_m)|\leqq\|\varphi_n\|\cdot\|\psi_n-\psi_m\|+\|\varphi_n-\varphi_m\|\cdot\|\psi_m\|$$

を得ることからわかる．$\|\varphi_n\|\leqq\|\varphi_n-\varphi_m\|+\|\varphi_m\|$ と $\|\varphi_n-\varphi_m\|\to 0$ $(n,m\to\infty)$ とによって $\{\|\varphi_n\|\}$ は有界で，$\|\psi_n-\psi_m\|\to 0$ $(n,m\to\infty)$ であるから右辺第一項は $\to 0$ $(n,m\to\infty)$．同じく右辺第二項も $\to 0$ $(n,m\to\infty)$ となるからである．

この $(\tilde{\varphi},\tilde{\psi})$ が内積の条件 (1·4) を満足し，かつ $\mathrm{dis}(\tilde{\varphi},0)^2=\|\tilde{\varphi}\|^2=(\tilde{\varphi},\tilde{\varphi})$ なることは

$$\begin{aligned}\|\tilde{\varphi}\|^2&=(\mathrm{dis}(\tilde{\varphi},0))^2=(\lim_{n\to\infty}\mathrm{dis}(\varphi_n,0))^2=(\lim_{n\to\infty}\|\varphi_n\|)^2=\lim_{n\to\infty}\|\varphi_n\|^2\\&=\lim_{n\to\infty}(\varphi_n,\varphi_n)\end{aligned}$$

からわかる．（終）

4　Hilbert 空間 $L_2(S)$

R^n の可測集合 S で定義せられた複素数値可測函数 $\varphi(x)$ で $\int_S|\varphi(x)|^2dx<\infty$ なるごときものの全体を $L_2(S)$ とすると，$L_2(S)$ は

$$\left.\begin{aligned}&(\varphi+\psi)(x)=\varphi(x)+\psi(x)\\&\int_S\varphi(x)\bar{\psi}(x)dx=(\varphi,\psi)\\&\|\varphi\|=(\varphi,\varphi)^{1/2}\end{aligned}\right\}\qquad(4\cdot1)$$

の意味で Hilbert 空間をつくる．ただし S の上で殆んど至る所一致するような $\varphi(x)$ と $\psi(x)$ とは同一のベクトルとみなすことにする．

（証明）　$\varphi(x),\psi(x)$ とともに $(\varphi+\psi)(x)$ が $L_2(S)$ に属することは，複素数 a,b について $|a+b|^2\leqq4(|a|^2+|b|^2)$ が成り立つことから明らか．また (φ,ψ) の定義されることは $2|ab|\leqq|a|^2+|b|^2$ からわかる．よって $L_2(S)$ は pre-Hilbert 空間になる．

ノルム $\|\varphi\|$ による $L_2(S)$ の完備性の証明は次のとおり．

$\lim_{n,m\to\infty}\|\varphi_n-\varphi_m\|=0$ とすると，適当に $\{\varphi_n\}$ の部分列 $\{\varphi_{n_k}\}$ を選んで $\sum_{k=1}^{\infty}\|\varphi_{n_{k+1}}-\varphi_{n_k}\|<\infty$ ならしめ得る．そうすると函数列：

$$\{\psi_m(x)\},\ ただし\ \psi_m(x)=|\varphi_{n_1}(x)|+\sum_{k=1}^{m}|\varphi_{n_{k+1}}(x)-\varphi_{n_k}(x)|$$

は $\epsilon L_2(S)$，かつ殆んどすべての $x\epsilon S$ に対して $\lim_{m\to\infty}\psi_m(x)<\infty$ である．積分論における Lebesgue–Fatou の定理と三角不等式 (1·7) によって

$$\int_S \lim_{m\to\infty}\psi_m{}^2(x)dx\leqq\varliminf_{m\to\infty}\int_S \psi_m(x)^2dx=\varliminf_{m\to\infty}\|\psi_m\|^2$$

$$\leqq\varliminf_{m\to\infty}\left(\|\varphi_{n_1}\|+\sum_{k=1}^{m}\|\varphi_{n_{k+1}}-\varphi_{n_k}\|\right)^2<\infty$$

を得るからである．故に殆んどすべての $x\epsilon S$ に対して

$$\varphi_{n_{m+1}}(x)=\varphi_{n_1}(x)+\sum_{k=1}^{m}(\varphi_{n_{k+1}}(x)-\varphi_{n_k}(x))$$

は，$m\to\infty$ なるとき絶対収束しかつこの極限値

$$\varphi_\infty(x)=\lim_{m\to\infty}\varphi_{n_{m+1}}(x)\ は\ \epsilon L_2(S)\ (\|\varphi_{n_{m+1}}\|^2\leqq\varliminf_{k\to\infty}\|\psi_k\|^2)$$

また $\varphi_{n_{m+1}}(x)$ が絶対収束するような $x\epsilon S$ においては

$$(\varphi_\infty-\varphi_{n_k})(x)=\lim_{m\to\infty}\sum_{j=k}^{m}(\varphi_{n_{j+1}}(x)-\varphi_{n_j}(x))$$

で，上と同じようにして

$$\|\varphi_\infty-\varphi_{n_k}\|\leqq\varliminf_{m\to\infty}\left\|\sum_{j=k}^{m}(\varphi_{n_{j+1}}-\varphi_{n_j})\right\|\leqq\sum_{j=k}^{\infty}\|\varphi_{n_{j+1}}-\varphi_{n_j}\|\to 0\quad(k\to\infty)$$

故に三角不等式で

$$\|\varphi_\infty-\varphi_n\|\leqq\|\varphi_\infty-\varphi_{n_k}\|+\|\varphi_{n_k}-\varphi_n\|\to 0\ (k\to\infty, n\to\infty)\quad(終)$$

$C^0(S)$ の完備化としての $L_2(S)$　S の上で連続な複素数値函数でコンパクトな台をもつ $\varphi(x)$ は確かに $\epsilon L_2(S)$．よって $C^0(S)\subseteqq L_2(S)$ である．上に与えた $L_2(S)$ の完備性の証明から $C^0(S)$ を完備化するための $C^0(S)$ の Cauchy 列 $\{\varphi_n(x)\}$ によって定まる $\widetilde{\varphi}$ に対して $\varphi_\infty(x)=\lim_{n\to\infty}\varphi_{n_k}(x)$（殆んどすべての $x\epsilon S$ に対して）を対応させることにすると，$C^0(S)$ の完備化が $\subseteqq L_2(S)$ なることがわかる．しかもこの完備化が $L_2(S)$ と一致することは，任意の $\varphi(x)\epsilon L_2(S)$ と任意の $\varepsilon>0$ に対して，Lebesgue 積分の定義により，$\|\varphi-\varphi_\varepsilon\|^2=\int_S |\varphi(x)-\varphi_\varepsilon(x)|^2dx<\varepsilon$ なるごとき $\varphi_\varepsilon(x)\epsilon C^0(S)$ を

選べることからわかる.

5　閉部分空間への正射影

部分空間　Hilbert 空間 H の部分集合 M が条件

$$x, y \in M \text{ ならば一次結合 } ax+by \in M$$

を満足するときに M は H の**部分空間** (linear subspace) という. とくに M が距離空間 H において閉集合になっているときに M を H の**閉部分空間**という.

直交性 (**orthogonality**) Hilbert 空間 H の二つのベクトル x と y とが $(x, y)=0$ なる関係にあるとき, x は y と**直交**するといい, $x \perp y$ と書く. $x \perp y$ ならば $y \perp x$ である. x が H の部分空間 M のすべてのベクトル y に直交するときに $x \perp M$ と書くことにする.

閉部分空間への正射影　M が Hilbert 空間 H の閉部分空間ならば, 任意の $x \in H$ は

$$x=y+z, \quad y \in M \text{ かつ } z \perp M \tag{5·1}$$

なるように一意的に表わされる. y を x の M への**正射影** (projection) という.

(証明)　$x \in M$ ならば $y=x, z=0$ として分解 (5·1) が得られるから, $x \notin M$ と仮定する.

$$d=\inf_{y' \in M} \|x-y'\|^2$$

とし M の点列 $\{y_n\}$ を $\lim_{n\to\infty} \|x-y_n\|^2=d$ が成り立つようにとる. 任意の $w \in M$ と任意の複素数 ε に対して $y_n+\varepsilon w \in M$ であるから $\|x-(y_n+\varepsilon w)\|^2 \geqq d$. したがって

$$\|x-y_n\|^2-\bar{\varepsilon}(x-y_n, w)-\varepsilon(w, x-y_n)+|\varepsilon|^2\|w\|^2 \geqq d$$

$w \neq 0$ として

$$\varepsilon=(x-y_n, w)/\|w\|^2$$

をとると

$$\|x-y_n\|^2-\frac{|(x-y_n, w)|^2}{\|w\|^2} \geqq d$$

よって

$$|(x-y_n, w)|^2 \leqq \|w\|^2 \cdot (d_n-d), \qquad d_n=\|x-y_n\|^2$$

この不等式は $w=0$ のときにも成り立つから

$$w \in M \text{ ならば } |(x-y_n, w)| \leqq \|w\| \cdot \sqrt{d_n-d}, \qquad d_n=\|x-y_n\|^2 \tag{5·2}$$

故に

$$|(y_n-y_m, w)|\leqq|(y_n-x, w)|+|(x-y_m, w)| \leqq\|w\|(\sqrt{d_n-d}+\sqrt{d_m-d})$$

$w=y_n-y_m$ ととって

$$\|y_n-y_m\|\leqq\sqrt{d_n-d}+\sqrt{d_m-d}$$

となるから $d_n\to d$ $(n\to\infty)$ によって $\|y_n-y_m\|\to 0$ $(n, m\to\infty)$. したがって H の完備性から $\lim_{n\to\infty}\|y_n-y\|=0$ なる $y\in H$ が存在する. $y_n\in M$ かつ M が閉集合であるから $y\in M$.

次に (5·2) において $n\to\infty$ ならしめて $(x-y, w)=0$ を得る. $||(x-y_n, w)|-|(x-y, w)||\leqq|(x-y_n, w)-(x-y, w)|\leqq|(y-y_n, w)|\leqq\|y-y_n\|\cdot\|w\|\to 0$ $(n\to\infty)$ であるからである.

故に $z=x-y$ とおいて分解 (5·1) を得た. 分解の一意性の証明は次のようにするとよい.

$$x=y'+z',\quad y'\in M \text{ かつ } z'\perp M \tag{5·1$'$}$$

とすれば, (5·1) と組合せて $w=y-y'=z'-z$ が $w\perp w$ を満足することになり, $w=0$ したがって $y=y', z=z'$ を得るのである.

6 F. Riesz の定理

F. Riesz の定理 Hilbert 空間 H において定義せられた加法的汎函数 $f(x)$ が**有界** (bounded) とする. すなわちある正数 C に対して

$$\|x\|\leqq C \text{ ならば } |f(x)|\leqq 1 \tag{6·1}$$

このとき $\|y\|\leqq C^{-1}$ なる $y\in H$ が一意的に定まって, すべての $x\in H$ に対して $f(x)=(x, y)$.

(証明) まず (6·1) は

$$\text{すべての } x\in H \text{ に対して } |f(x)|\leqq C^{-1}\|x\| \tag{6·1$'$}$$

と同等である. まず (6·1) が成り立っているとし $x\neq 0$ とすると $Cx/\|x\|$ のノルムは $\leqq C$ であるから $|f(Cx/\|x\|)|\leqq 1$ すなわち $|f(x)|\leqq C^{-1}\|x\|$. この不等式は $x=0$ でももちろん成り立つから結局 (6·1)′ がいえた. 次に (6·1)′ から (6·1) のでてくることは明らかである.

$f(x)=0$ を満足する x の全体を M とする. f が加法的であるから M は H の部分空間である. また $\{x_n\}\subseteq M$ かつ $\lim_{n\to\infty}\|x_n-x\|=0$ とすると (6·1)′ で $|f(x)-f(x_n)|=$

$|f(x-x_n)|\leqq C^{-1}\|x-x_n\|$ を得るから $f(x_n)=0$ により $f(x)=0$ でなければならない．すなわち M は閉部分空間である．

任意の $x\in H$ に対して x の M への正射影を y_x, $x-y_x=x_0$ とおくと，$x_0\perp M$, かつ

$$x\notin M \text{ ならば } x_0\neq 0,\quad x_0\perp M$$

よって $x\notin M$ ならば $x_0\notin M$ となり，したがって $f(x_0)=a\neq 0$. 故に $x_1=x_0/a$ とおくと

$$f(x_1)=1,\ \ x_1\perp M \tag{6·2}$$

任意の $x'\in H$ に対して $f(x')=b$ とし $x'-bx_1$ をつくると $\in M$ である．$f(x'-bx_1)=f(x')-bf(x_1)=0$ となるからである．故に (6·2) から x' の分解

$$x'=bx_1+z,\ \ x_1\perp M \text{ かつ } z\in M\ \ (b=f(x'))$$

が得られた．故に

$$(x',x_1)=b\|x_1\|^2=f(x')\|x_1\|^2$$

を得て $f(x')=\left(x',\dfrac{x_1}{\|x_1\|^2}\right)$. つまり

$$y=\frac{x_1}{\|x_1\|} \text{ とおくとすべての } x\in H \text{ に対して } f(x)=(x,y) \tag{6·3}$$

上式において $x=y$ ととって $f(y)=(y,y)=\|y\|^2$. また (6·1)′ から $|f(y)|\leqq C^{-1}\|y\|$ であるから $\|y\|\leqq C^{-1}$ でなければならない．

y が一意的に定まることは，すべての $x\in H$ に対して $f(x)=(x,y)=(x,y')$ とすると $(x,y-y')=0$ となり $x=y-y'$ ととって $\|y-y'\|^2=0$, したがって $y=y'$ となることからわかる．(終)

注　Hilbert 空間 H の部分空間 N で定義せられた加法的汎函数 $f_0(x)$ が

$$x\in N \text{ かつ } \|x\|\leqq C \text{ ならば } |f_0(x)|\leqq 1 \tag{6·4}$$

を満足するとき，$\|y\|\leqq C^{-1}$ なる $y\in H$ が定まってすべての $x\in N$ に対して $f_0(x)=(x,y)$.

(証明)　まず (6·4) は

$$x\in N \text{ ならば } |f_0(x)|\leqq C^{-1}\|x\| \tag{6·4$'$}$$

と同等なことが上と同様にして証明される．

N の閉苞を N^a とし，任意の $x\in H$ を

$$x=y+z,\ \ y\in N^a \text{ かつ } z\perp N^a \tag{6·5}$$

と分解する．H の上で定義せられた加法的汎函数 $f(x)$ を次のようにして定義する．x

の分解 (6·5) に対して $y_n \in N$ かつ $\lim_{n\to\infty}\|y_n-y\|=0$ なる $\{y_n\}$ をとり

$$f(x)=\lim_{n\to\infty} f_0(y_n)$$

とおく. まず右辺の極限が存在することは, $\{y_n\}$ が Cauchy の収束条件を満足することと, (6·4)′ から得る $|f(y_n)-f(y_m)|=|f(y_n-y_m)|\leqq C^{-1}\|y_n-y_m\|$ からわかる. またこの極限が $y_n \in N$ かつ $\lim_{n\to\infty}\|y_n-y\|=0$ なる $\{y_n\}$ のとりかたに関係しないで y だけで定まることも同様にしてわかる.

そうすれば $f(x)$ が (6·1) を満足する加法的汎函数になり, すべての $x \in H$ に対して $f(x)=(x, y)$ となる $y \in H$ が一意的に定まるわけである. $x \in N$ ならば $f(x)=f_0(x)$ であるから証明が終ったわけである. (終)

あ と が き

本文中において超函数の空間の反射性の証明は筆者の工夫による．偏微分方程式への応用についての二三の個所を省いては，大体において本文中に挙げた Schwartz の書物および Chevalley の講義ノートを参照して述べた．なお進んで研究せられんとする読者は下に挙げる論文などをみられたい．

1．超函数の Laplace 変換については

J. L. Lions : Support dans la transformation de Laplace, J. d'analyse math. Vol. II (1952), 369–380.

L. Schwartz : Transformation de Laplace des distributions, Comm. du sémin. math. de l'Univ. de Lund, tome suppl. (1952), dedié á M. Riesz, p. 196–206.

2．超函数の調和分析については

L. Schwartz : Analyse et synthese harmonique dans les espaces de distributions, Canad. J. of Math. Vol. III (1951), 503–512.

3．定数係数の偏微分方程式などについては

L. Ehrenpreis : Solution of some problems of division, Amer. J. of Math. 76(1954), 888–903 ; The division problem for distributions, Proc. Nat. Acad. Sci. 41 (1955), 757–758 ; Mean periodic functions, Amer. J. of Math. 77 (1955), 293–328 ; Appendix to the Paper "Mean periodic functions," ibid. 77 (1955), 731–733; Solution of some problems of division Part, II. ibid. 77 (1955), 286–292 ; Completely inversible operators, Proc. Nat. Acad. Sci. 44 (1955), 954–946 ; General theory of elliptic equations, ibid. 42 (1956), 39–41 ; Analytic functions and the Fourier transform of distributions, I, Ann. of Math. 63 (1956), 129–159.

Séminaire Schwartz : Paris (1955)

4. 一般係数の偏微分方程式など

Deny-Lions: Les espaces du type de Beppo Levi, Ann. de l'Institut Fourier, V (1953-54), 305-370.

J. L. Lions : Problèmes aux limites en theorie des distributions, Acta Math. 94 (1955), 1-153 ; Sur quelques problèmes aux limites relatifs à des operateurs différentiels elliptiques, Bull. Soc. Math. France, 83 (1955), 225-250.

L. Schwartz : Théorie des noyaux, Proc. Internat. Congress of Math. I (1950), 220-230 ; Les équations d'évolutions liées aux produit de composition, Ann. de l'Institut Fourier, (1952), 19-49 ; Distributions à valeurs vectorielles, to appear in Journ. d'analyse math. ; Problèmes aux limtes sur des espaces fibrés, Acta Math. 94 (1955), 155-159.

K. Yosida : On the integration of the temporally inhomogeneous diffusion equation in a Riemannian space, Proc, Jap. Acad. 33 (1954), 19-23, 273-275 ; Semi-group theory and the integration problem of diffusion equations, Internat. Congress of Math. 1954 ; An operator-theoretical integration of wave equations, J. Math. Soc. Japan, 8 (1956), 79-92.

5. とくに調和函数や調和積分への応用については

秋月康夫 : 調和積分論, I, II, 1955-56 (岩波).

Deny : Les potentiels d'énergie finie, Acta Math. 89 (1950), 107-183.

G. de Rham-K. Kodaira : Harmonic integrals, Princeton (1950).

G. de Rham : Variétés différentiables, Paris (1955).

6. 確率過程への応用については

K. Itô : Stationary random distributions, Mem. Coll. of Sci., Univ. of Kyoto, 28 (1953), 209-223.

索　　引

タ

チ

テ

ト

ナ

ニ

ノ

ハ

ヒ

フ

ヘ

ホ

——著者紹介——

吉田耕作(よしだこうさく)

1931年　東京大学理学部卒業
　　　　東京大学名誉教授，京都大学名誉教授
　　　　理学博士
専　攻　函数解析学，確率論

検印廃止

復刊　超函数論

1956年11月20日　初版1刷発行
1969年6月15日　初版4刷発行
2009年10月10日　復刊1刷発行

著者　吉田耕作
発行者　南條光章
東京都文京区小日向4丁目6番19号

NDC 415.6

発行所　共立出版株式会社
東京都文京区小日向4丁目6番19号
電話　東京(03)3947-2511番(代表)
郵便番号112-8700
振替口座00110-2-57035番
URL　http://www.kyoritsu-pub.co.jp/

印刷・藤原印刷株式会社　製本・中條製本

Printed in Japan

社団法人
自然科学書協会
会員

ISBN 978-4-320-01899-0